Suite d'ensembles partiellement ordonnés

Bachir Sadi
Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Faculté des sciences,
Département de Mathématiques
Sadibach@yahoo.fr

Résumé : Ce travail porte sur le développement d'un ordre $D(P)$ sur les antichaînes maximales d'un ordre donné. L'ordre développé $D(P)$ est inclus dans le Treillis des antichaînes maximales $AM(P)$, introduit par R.P. Dilworth, en 1960. Dans [1], T.Y. Kong et P. Ribenboim ont montré qu'il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne, où , i fois. On note $cdev(P)$ le plus petit i tel que $D^i(P)$ est une chaîne. Nous trouvons $cdev(P)$ pour quelques classes particulières d'ordres et nous faisons une approche de ce paramètre dans le cas d'un ordre quelconque.

Mots- clés : Antichaîne maximale, ordre, ordre partiel.

Abstract : This work is to study an order $D(P)$ on maximal antichains of a given order. $D(P)$ is an order included in the order which defines the Lattice of maximal antichains $AM(P)$, introduced by R.P. Dilworth, in 1960. In [1], T.Y. Kong and P. Ribenboim have proved that there exists an integer i such that $D^i(P)$ is a chain, where , i times. We find the smallest i, noted $cdev(P)$ such that $D^i(P)$ is a chain for some particular classes of orders and we approximate this parameter in the general case of order.

Keywords : Maximal antichain, order, partial order.

Introduction – Définitions

Un ensemble ordonné est un couple $(X, \leq_P)$, où X est un ensemble et « $\leq$ », un ordre sur X, c ' est - à - dire, une relation binaire définie sur les éléments de X, qui est réflexive, antisymétrique et transitive. On note $P = (X, \leq_P)$, l'ensemble ordonné. Il est dit aussi ensemble ordonné P, ou ordre P. On appelle *chaîne* de P, un ensemble d'é léments de X comparables deux à deux. La *longueur* d'un e chaîne est le nombre de ses éléments. Une *antichaîne* de P est constituée d'é léments de X, non comparables deux à deux.
Une chaîne (resp. antichaîne) de P est maximale si elle n'est incluse dans aucune autre chaîne (resp. antichaîne) de P.
Soit $P = (X, \leq)$, un ensemble partiellement ordonné. On considère l'ordre ainsi défini sur les antichaînes maximales de P : A, B deux antichaînes maximales de P, $A \leq B$ si et seulement si tel que $a \leq b$. Pour cet ordre, les antichaînes maximales de P forment un treillis appelé *treillis des antichaînes maximales* de P, noté $AM(P)$, introduit par R.P. Dilworth, en 1960.
L'o rdre strict $(D, <)$, inclus dans le précédent ordre $AM(P)$, est ainsi défini : A, B deux antichaînes maximales de P, $A < B$ si et seulement si tel que $a < b$. On note cet ordre $D(P)$. Par rapport à est un ordre inclus où l'on ne tolère plus que deux antichaînes maximales ayant une intersection non vide soient comparables. Il a été démontré dans [1] qu'il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne ($D^i(P)$ étant la $i^{ème}$ itération de $D(P)$), et que $i \leq 2d(P) - 1$, où $d(P)$ est la longueur de la plus longue chaîne de P.
On note par $cdev(P)$, et on lit « chaîne – déviation » de P, le plus petit entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne ; soit est une chaîne $\}$. On pose $Min(P) = \{x \in P / \Pr ed(x) = \phi\}$, où $\Pr ed(x)$ désigne l'ensemble des prédécesseurs de (x), n'incluant pas x. Soit l'application rang, notée rg, de P dans l'ensemble des entiers naturels, définie par :

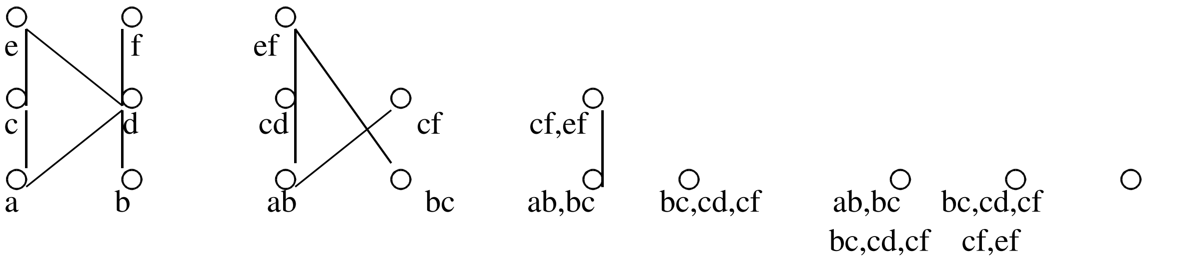
$$x \in P, rg(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in Min(P) \\ \max\{rg(y) / y \in \Pr ed(x)\} + 1 \quad si \quad x \notin Min(P) \end{cases}$$

Appelons N_k, l'ensemble des éléments de P, de rang k. N_k est le niveau k de P. Si A est une antichaîne maximale de P, on appelle *inclinaison* de A, la quantité $I(A) = \max\limits_{x,y \in A}\{rg(y) - rg(x)\}$. L'inclinaison de P est , A antichaîne maximale de P.

Etude de $D(P)$

Il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne et que $i \le 2d(P)-1$, donc . Nous déterminons $cdev(P)$ pour quelques classes d'ordres et nous utilisons $I(P)$ pour approcher le paramètre dans le cas d'un ordre quelconque.

Pour commencer, voyons sur un exemple, comment se forme la suite , avec $i = cdev(P)$.



P $D(P)$ $D^2(P)$ $D^3(P)$ $D^4(P)$

Ici, $cdev(P) = 4$. $D^4(P)$ est une chaîne réduite à un seul élément.

Proposition 1: Pour tout ordre $P = (X, \le)$, non connexe, $cdev(P) \le 3$.

Tout d'abord, notons le fait 1 suivant :
Soit P un ordre et soit $(C_i)_{i \in I}$, la famille de ses composantes connexes.
Alors, $\forall A \in AM(P)$ et $\forall i \in I$, on a $A \cap C_i \neq \phi$.

Preuve : Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que . Pour tout est une antichaîne. Or, A est maximale.

Preuve de la Proposition 1 : Soit P un ordre non connexe et soit $(C_i)_{i \in I}$, la famille de ses composantes connexes. Notons que $|I| \ge 2$ et qu'ainsi, il existe $A \in AM(P)$ tel que $Min_P(C_1) \cup Max_P(C_2) \subseteq A$. Montrons, maintenant, que $\forall B \in AM(P)$, on a A et B qui sont incomparables dans $D(P)$. En effet, d'après le fait 1, il existe $b_1 \in B \cap C_1$ et $b_2 \in B \cap C_2$.

Comme il existe tel que $c_1 \leq_P b_1$ et comme il existe tel que $b_2 \leq_P c_2$, l'on obtient, respectivement, que B n'est pas strictement inférieure à A, dans $D(P)$, et A n'est pas strictement inférieure à B, dans $D(P)$. Ainsi, A est un élément isolé de $D(P)$, et il est donc présent dans toute antichaîne maximale de $D(P)$. Ceci implique que $D(D(P))$ est une antichaîne, donc que ; ce qui achève la preuve.

On appelle *hauteur* d'un ordre P, la quantité . Les ordres de hauteur 1 sont les ordres bipartis. Un ordre faible (weak order) est un ordre obtenu par composition séries d'antichaînes.

Proposition 2 : Pour tout ordre faible P, on a $cdev(P) = 1$.

Preuve : Les seules antichaînes de l'ordre P sont ses niveaux. A tout niveau de P correspond un élément de $D(P)$ et inversement . Les sommets de $D(P)$ forment un ordre total. $D(P)$ est donc, une chaîne.

Proposition 3 : Pour tout ordre connexe P, de hauteur 1, et qui ne soit pas un ordre faible, on a $cdev(P) = 3$.

Preuve : Soient N_1 et N_2, les niveaux de P. Comme P n'est pas un ordre faible, il existe $x \in N_1$ et $y \in N_2$ tels que x et y appartiennent à la même antichaîne maximale A de P. A est un élément de $D(P)$, comparable à aucun autre dans $D(P)$. Comme P est connexe, N_1 et N_2 sont deux antichaînes maximales de P, donc deux éléments comparables dans $D(P)$; $D(P)$ ne peut donc être une antichaîne. L'élément A de $D(P)$ appartiendra à toute antichaîne maximale de $D(P)$, donc à tout élément de $D^2(P)$. $D^2(P)$ est, alors, une antichaîne maximale ; ce qui implique que $D^3(P)$ est une chaîne.

Corollaire : Si P est un ensemble ordonné, représenté par un graphe qui est un arbre, $cdev(P) \leq 3$.

Tout arbre est un graphe biparti. En effet, on peut toujours colorier les sommets de P avec deux couleurs différentes de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

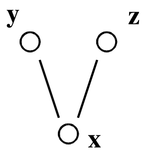
Soient , les niveaux d'un ordre P, tels que (N_1, N_2) soit un biparti complet du graphe représentant P. On considère P', l'ordre P diminué de N_1.

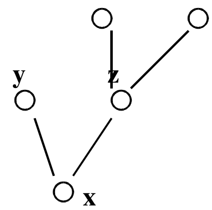
Lemme : .

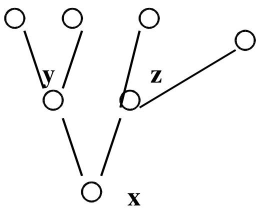
En effet, l'antichaîne maximale N_1 est un élément minimal dans , où $i = cdev(P)$. N_1 et N_2 sont comparables dans ; en particulier dans $D^i(P)$.

Proposition 4: Soit P, un ensemble ordonné, représenté par un graphe sans cycle, ayant k niveaux , avec $|N_1| = 1$. Alors, $cdev(P) \leq 3$.

Preuve : Soit $N_1 = \{x\}$. x est comparable à tous les éléments de P. (N_1, N_2) forme, donc, un biparti complet du graphe représentant P. Posons $P' = P - N_1$. Pour un tel ordre, il existe trois formes :

1) 

2) 

3) 

Dans 1), P' est une antichaîne maximale, donc $D(P)$ est une chaîne ; .
Dans 2), P' est un ordre non connexe, avec un élément isolé y. Tout élément de $D(P)$ contient y. $D(P)$ est donc, une antichaîne maximale ; $D^2(P)$ est une chaîne. Ensuite, .
Dans le cas 3), P' est un ordre non connexe. D'après la Proposition 1, .

Théorème : Pour tout ordre partiel P, différent d'un ordre total,
$cdev(P) \leq 2d(P) - 2I(P) + 1$.

Pour la démonstration de ce théorème, utilisons le lemme suivant :

Lemme : Pour tout ensemble partiellement ordonné différent d'un ordre total, d'inclinaison $I(P)$,

Preuve : Soit $I(P)$, l'inclinaison de l'ordre P, obtenue pour deux éléments x et y d'une antichaîne maximale de P, tels que $x \in N_i$ et $y \in N_k$, où N_i et N_k sont deux niveaux de P, avec i k. $I(P) = k - i$. Ceci implique qu'il existe une suite d'éléments de P, , tels que , où . x est incomparable à car, sinon, x serait comparable à y. Comme les éléments a_j ne sont pas seuls dans les niveaux , il existe des éléments $b_i, b_{i+1}, \cdots, b_k$ tels que . Jusqu'au niveau N_k, on sait que $a_j < b_{j+1}, j = i, i+1, \cdots, k-1$ et que b_j est incomparable à y, pour .

Dans $D(P)$, jusqu'au niveau N_k, les antichaînes et $x = b_i$), $b_{i+1}a_j (j = i+1, i+2, ..., k), ..., b_{k-1}a_j (j = k-1, k), b_k a_k$ sont telles que $b_i a_k$ sont incomparables à $b_j a_t (j = i, i+1, ..., k; t = i, i+1, ..., k)$, ou bien xy est incomparable à $b_j a_t$.Comme les éléments d'un même niveau sont incomparables, on aura :
Dans $D^2(P)$, xy est incomparable aux niveaux , de $D(P)$. Dans $D^2(P)$, $xy \cup N_i, xy \cup N_{i+1}, ..., xy \cup N_k$ sont des antichaînes. Il y aura alors, dans $D^2(P)$, $(k-i)$

niveaux de moins que dans $D(P)$. Comme $k - i = I(P)$, on aura $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P) \leq d(P) - I(P)$ (d'après le corollaire 2.5, dans [1]).

Preuve du théorème : Considérons les deux cas suivants :

1) $D^2(P)$ est un ordre total : Dans ce cas, et $cdev(P) = 2$; . $D^2(P)$ étant un ordre, on peut lui appliquer le résultat de [1] et écrire $cdev(D^2(P)) \leq 2d(D^2(P)) - 1$. D'après le lemme précèdent, $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P)$. Le corollaire 2.5, dans [1], nous permet d'écrire $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P) \leq d(P) - I(P)$. On aura, alors :
$cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 1 \leq 2d(D^2(P)) - 1 + 1 \leq 2[d(P) - I(P)] < 2d(P) - 2I(P) + 1$.
2) $D^2(P)$ n'est pas un ordre total : Dans ce cas, . Pour les mêmes raisons utilisées dans 1), on peut écrire
$cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 2 \leq 2d(D^2(P)) - 1 + 2 \leq 2[d(P) - I(P)] + 1 = 2d(P) - 2I(P) + 1$.

Discussion autour des deux bornes : Pour un ensemble ordonné P donné, considérons les deux bornes de $cdev(P)$; soient la borne , utilisée dans [1], et la borne , que nous proposons. $b_1 \geq b_2 \;\Rightarrow\; I(P) \geq 1$. Nous pouvons dire que pour tout ordre partiel P, b_2 est meilleure que b_1. Ceci montre aussi que, pour un ordre total, b_1 est meilleure que b_2.

Bibliographie :

[1] T.Y. Kong and P. Ribenboim, Channing of partially ordered sets, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 533-537, 1994.