

R-adaptation de maillage par l'estimateur d'erreur hiérarchique

A. Alla⁽¹⁾, M. Fortin⁽²⁾, F. Hecht⁽³⁾, Z. Mghazli⁽¹⁾

(1) Laboratoire SIANO, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, B.P. 133, Kénitra, Maroc.

(2) GIREF, Université Laval, Québec, G1K-7P4, Canada.

(3) Laboratoire J.L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, B.C. 187, 4 place Jussieu, Paris Cedex 05, France.

RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail est de déterminer la meilleure position des noeuds d'un maillage, utilisé lors de la discrétisation d'un problème aux limites par la méthode des éléments finis. La procédure de déplacement des noeuds (appelé aussi R-adaptation) est une étape importante dans la stratégie globale d'adaptation de maillage. La position optimale des noeuds est déterminée en minimisant l'erreur d'approximation. Pour évaluer cette erreur nous utilisons l'estimateur d'erreur hiérarchique. Un test numérique est présenté.

ABSTRACT. The objective of this work is to devise a method to determine the optimal position of the nodes in a finite element discretization for a boundary value problem. The node displacement procedure (also called R-adaptation) is a crucial step in a global mesh adaptation procedure. In the present approach, we determine the nodal position by minimizing the approximation error. This error is evaluated using a hierarchical estimator. A numerical test is presented

MOTS-CLÉS : méthode des éléments finis, adaptation de maillage, estimateur hiérarchique.

KEYWORDS : Finite element method, mesh adaptation, hierarchical estimator.

1. Introduction

Les estimations *a posteriori* et les procédures d'adaptation de maillage sont devenues ces dernières décennies, l'un des principaux axes de développement dans le domaine de l'analyse numérique et un outil indispensable dans la discrétisation des équations aux dérivées partielles. Elles ont pour but d'améliorer la qualité de la solution calculée et permettent d'assurer, d'une part que la solution approchée est d'une précision fixée, et d'autre part que cette précision est équidistribuée.

Les estimations *a posteriori* d'erreur sont données en termes d'indicateurs d'erreur qui peuvent être locaux et qui ne tiennent compte que de la solution approchée u_h effectivement calculée et des données du problème. Elles permettent d'identifier les régions du domaine source d'erreurs grossières. Plusieurs types d'estimations *a posteriori* ont été développés depuis les travaux pionniers de Babushka et Rheinboldt [2],[3]. On en distingue les estimations par résidus, les estimations par interpolation, les estimations par résolution de problèmes locaux, les estimations par dualité, les estimations hiérarchiques ([4],[5], [1]), . . . Une description générale des estimations *a posteriori* pour les problèmes elliptiques se trouve dans [9].

La méthode hiérarchique est basée sur une idée simple : étant donné une approximation par éléments finis d'ordre k , une meilleure approximation, d'ordre $k + 1$, peut être utilisée pour estimer la précision de la solution calculée. Pour éviter de procéder à des résolutions coûteuses on utilise une base hiérarchique de l'espace d'approximation éléments finis ([5]).

Ayant obtenu un estimateur d'erreur *a posteriori*, ce dernier est utilisé comme critère pour construire un procédé d'adaptation de maillage de manière à amener l'erreur réellement commise à un niveau choisi par l'utilisateur. Les algorithmes d'adaptation sont généralement basés sur des procédés de remaillage par création de sommets (raffinement), retournement d'arêtes, suppression de sommets (déraffinement) et déplacement des nœuds. Dans ce travail, nous nous intéressons aux déplacements des nœuds du maillage, et cherchons la position optimale, dans le sens qui réduit l'erreur d'approximation $u - u_h$, pour un problème linéaire elliptique de second ordre discrétisé par une méthode éléments finis conformes. Mathématiquement, ce problème est équivalent à un problème de minimisation d'une fonctionnelle coût liée à l'erreur d'approximation. Une étude dans ce sens a été réalisée dans [6] en utilisant la fonctionnelle d'énergie comme fonction coût. Nous nous proposons ici d'utiliser la norme de l'estimateur hiérarchique comme fonctionnelle coût sous la contrainte de deux problèmes variationnels discrets, l'un lié à la solution approchée u_h et l'autre lié à l'estimateur d'erreur hiérarchique. Ceci pourra constituer une justification mathématique de la procédure de déplacement des nœuds qui est souvent opérée, dans les différents codes de calcul, d'une manière intuitive. Le problème ainsi posé, est un problème d'optimisation de forme dont les paramètres sont la position des

nœuds du maillage. Nous utilisons les techniques de [10],[11],[8] pour calculer la dérivée de forme de la fonctionnelle coût.

2. Estimateur d'erreur hiérarchique

Etant donné un ouvert polygonal Ω de \mathbb{R}^n , de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, considérons le problème modèle

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V}, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = (F, v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{cases} \quad [1]$$

où $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$, l'espace $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|v\|^2 = a(v, v)$, et F un élément de $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Nous approchons le problème (1) par une méthode d'éléments finis. Si \mathcal{T}_h est une triangulation régulière de Ω , on considère l'espace éléments finis de degrés k , $\mathcal{V}_h^{(k)}$, défini par

$$\mathcal{V}_h^{(k)} = \{v_h \in \mathcal{V}; v_h|_K \in P_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

où $P_k(K)$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$ dans K .

le problème approché est donné par

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h^{(k)} \in \mathcal{V}_h^{(k)}, \text{ tel que :} \\ a(u_h^{(k)}, v_h) = (F, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^{(k)}. \end{cases} \quad [2]$$

L'erreur $e = u - u_h^{(k)}$, commise en approchant (1) par (2) est solution du problème

$$a(e, w) = r(w) \quad \forall w \in V$$

où $r(w) = (F, w) - a(u_h^{(k)}, w)$ est le résidu de l'équation (2). Une approximation de cette erreur peut être obtenue en considérant $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$, l'espace éléments finis de degré $k+1$ et en résolvant dans $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$ le problème

$$a(e_h^{(k+1)}, w_h) = r(w_h) \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h^{(k+1)}.$$

Ceci revient à résoudre le problème au complet dans $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$, ce qui peut être très coûteux. L'idée ici (cf. [5]) est d'utiliser une base hiérarchique de l'espace d'approximation $\mathcal{V}_h^{(k+1)}$ de manière à ce que ce dernier soit la somme directe de $\mathcal{V}_h^{(k)}$ (polynôme de degré k) et d'un espace de correction E_h de polynômes de degré $k+1$

$$\mathcal{V}_h^{(k+1)} = \mathcal{V}_h^{(k)} \oplus E_h.$$

Nous considérons ici le cas $k = 1$. L'approximation linéaire par morceaux est alors corrigée par une approximation quadratique par morceaux où seulement les nœuds des milieux des côtés sont calculés, les valeurs des sommets restant inchangées. L'erreur peut donc être approchée par la résolution du problème

$$\begin{cases} \text{trouver } e_h \in E_h, \text{ tel que :} \\ a(e_h, \hat{w}_h) = r(\hat{w}_h) \quad \forall \hat{w}_h \in E_h. \end{cases} \quad [3]$$

Nous résolvons donc un problème global mais dont la dimension, qui est celle de l'espace E_h , est beaucoup plus petite que celle de $\mathcal{V}_h^{(2)}$. Ce problème est bien conditionné (cf.[9]) et peut être résolu en quelques itérations par la méthode du gradient conjugué par exemple.

La méthode hiérarchique a été analysée pour une large classe de problèmes aux limites et le résultat principal est global.

Théorème 1 (voir [5]) *Sous les hypothèses*

1) *Hypothèse de saturation*

$$(H.S) \quad \exists \beta, \quad 0 < \beta < 1 \quad \text{tel que} \quad \| \|u - u_h^{(k+1)}\| \| \leq \beta \| \|u - u_h^{(k)}\| \|$$

2) *Inégalité de Cauchy-Binyakowski-Schwarz*

$$(CBS) \quad \begin{cases} \exists \gamma < 1 \quad \text{indépendant de } h, \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{V}_h^{(k)} \quad \forall w \in E_h \quad |a(v, w)| < \gamma \| \|v\| \| \|w\| \|, \end{cases}$$

nous avons

$$(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \| \|u - u_h^{(k)}\| \|^2 \leq \| \|e_h\| \|^2 \leq \| \|u - u_h^{(k)}\| \|^2. \quad [4]$$

3. Position du problème d'optimisation de forme

Etant la solution du problème (3) dont le second membre dépend des données et de la solution u_h , l'estimateur hiérarchique e_h , est une quantité calculable, équivalente à l'erreur $e = u - u_h$ dans le sens de l'inégalité (4). Il peut donc être utilisé comme critère dans une stratégie d'adaptation du maillage, qui comporte plusieurs opérations : retournement d'arrêtes, création de nœuds, suppression de nœuds et déplacement de nœuds. Nous proposons dans ce travail une méthode permettant de déterminer la position optimale des nœuds du maillage dans la résolution du problème (2), en utilisant l'estimateur hiérarchique. Pour un maillage donné \mathcal{T}_h , les solutions des problèmes (2) et (3) qui, bien entendu, dépendent de \mathcal{T}_h , seront notées respectivement $u_h(\mathcal{T}_h)$ et $e_h(\mathcal{T}_h)$.

Considérons la fonctionnelle

$$J(e_h(\mathcal{T}_h)) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla e_h(\mathcal{T}_h)|^2 = \frac{1}{2} \| \|e_h(\mathcal{T}_h)\| \|^2.$$

Le problème est donc le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la position des nœuds de } \mathcal{T}_h \text{ qui minimise } J(e_h(\mathcal{T}_h)), \\ \text{sous la contrainte} \\ \left\{ \begin{array}{l} a(e_h, \hat{v}_h) = (F, \hat{v}_h) - a(u_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in E_h \\ a(u_h, v_h) = (F, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad [5]$$

Notons \mathcal{M} l'ensemble des nœuds de \mathcal{T}_h et \mathcal{T}_T la famille des triangulations $\mathcal{T}_h(\mathcal{M})$ engendrées par les \mathcal{M} ayant une même table topologique, et formant l'ensemble m_T . Le problème d'optimisation de forme qu'on considère est donc le suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{\mathcal{M}} \in m_T \text{ tel que} \\ j(\widehat{\mathcal{M}}) = \inf_{\mathcal{M} \in m_T} j(\mathcal{M}) \text{ sous la contrainte} \\ \left\{ \begin{array}{l} a(e_h(\mathcal{T}_h(\mathcal{M})), \hat{v}_h) = (F, \hat{v}_h) - a(u_h(\mathcal{T}_h(\mathcal{M})), \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in E_h \\ a(u_h(\mathcal{T}_h(\mathcal{M})), v_h) = (F, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \end{array} \right. \end{array} \right. \quad [6]$$

où $j(\mathcal{M}) := J(e_h(\mathcal{T}_h(\mathcal{M})))$.

4. Algorithme

Nous supposons que les problèmes (5) et (6) admettent une unique solution. Pour calculer la dérivée de la fonctionnelle $j(\cdot)$ par rapport aux paramètres de forme qui sont les nœuds du maillage, nous introduisons le Lagrangien pour transformer le problème avec contraintes (5), en un problème sans contraintes. Ce Lagrangien dans $E_h \times \mathcal{V}_h^{(1)} \times E_h \times \mathcal{V}_h^{(1)}$ est donné par

$$\mathcal{L}(\hat{v}_h, v_h, q_h, \mu_h) = \frac{1}{2} \|\hat{v}_h\|^2 + a(\hat{v}_h, q_h) - (F, q_h) + a(v_h, q_h) + a(v_h, \mu_h) - (F, \mu_h).$$

Les deux problèmes adjoints associés sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } p_h \in E_h, \quad \text{telle que :} \\ \int_{\Omega_h} \nabla p_h \nabla \hat{v}_h \, d\Omega_h = - \int_{\Omega_h} \nabla e_h \nabla \hat{v}_h \, d\Omega_h \quad \forall \hat{v}_h \in E_h. \end{array} \right. \quad [7]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda_h \in \mathcal{V}_h, \quad \text{telle que :} \\ \int_{\Omega_h} \nabla \lambda_h \nabla v_h \, d\Omega_h = - \int_{\Omega_h} \nabla p_h \nabla v_h \, d\Omega_h \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \end{array} \right. \quad [8]$$

où la notation Ω_h signifie que le domaine Ω est maillé avec la triangulation \mathcal{T}_h .

Pour calculer la dérivée de $j(\cdot)$ par rapport au domaine on utilise les techniques de [6], [11] et [8]. Soit T_t une transformation donnée par un champ de vitesse V , telle que

$T_t(\Omega_h) = \Omega_h^t$. On note $e_h^t := e_h \circ T_t^{-1}$ et $\mathcal{M}^t = T_t(\mathcal{M})$.

À l'instant $t > 0$, nous avons par changement de variable

$$j(\mathcal{M}^t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h^t} |\nabla e_h^t|^2 d\Omega_h^t = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} A(t) \nabla e_h \cdot \nabla e_h d\Omega_h,$$

où $A(t) = DT_t^{-1} J_t^* DT_t^{-1}$ et $J_t = \det(DT_t)$. La dérivation de $j(\mathcal{M}^t)$ par rapport à t à l'instant $t = 0$ donne

$$dj(\mathcal{M}^t; V) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla e_h \cdot \nabla e_h d\Omega_h + \int_{\Omega_h} \nabla e_h \cdot \nabla \dot{e}_h d\Omega_h. \quad [9]$$

À l'instant $t > 0$, le problème (3) est donné par

$$\int_{\Omega_h^t} \nabla e_h^t \nabla \hat{w}_h d\Omega_h^t = \int_{\Omega_h^t} F \hat{w}_h d\Omega_h^t - \int_{\Omega_h^t} \nabla u_h^t \nabla \hat{w}_h d\Omega_h^t$$

L'application d'un changement de variable donne

$$\int_{\Omega_h} A(t) \nabla e_h \cdot \nabla \hat{w}_h d\Omega_h = \int_{\Omega_h} J_t F \circ T_t \hat{w}_h d\Omega_h - \int_{\Omega_h} A(t) \nabla u_h \cdot \nabla \hat{w}_h d\Omega_h$$

On utilise la dérivée des formes bilinéaires, en posant $\hat{w}_h = p_h$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla \dot{e}_h \nabla p_h d\Omega_h &= \int_{\Omega_h} \text{div}(FV(0)) p_h d\Omega_h - \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla(e_h + u_h) \cdot \nabla p_h d\Omega_h \\ &\quad - \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u}_h \nabla p_h d\Omega_h. \end{aligned}$$

Dans le problème (7), on pose $\hat{v}_h = \dot{e}_h$ pour obtenir

$$\begin{aligned} dj(\mathcal{M}^t; V) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla e_h \cdot \nabla e_h d\Omega_h + \int_{\Omega_h} A'(0) (\nabla u_h + \nabla e_h) \cdot \nabla p_h d\Omega_h \\ &\quad - \int_{\Omega_h} \text{div}(FV(0)) p_h d\Omega_h + \int_{\Omega_h} \nabla \dot{u}_h \nabla p_h d\Omega_h. \end{aligned}$$

De même, on applique un changement de variable au problème (2) donné à un instant $t > 0$, puis on utilise la dérivée des formes bilinéaires en posant $v_h = \lambda_h$ dans la formule obtenue et $\hat{v}_h = \dot{u}_h$ dans le problème (8), on obtient finalement une écriture explicite de la dérivée de $j(\cdot)$, donnée par

$$\begin{aligned} dj(\mathcal{M}^t; V) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla e_h \cdot \nabla e_h d\Omega_h - \int_{\Omega_h} \text{div}(FV(0)) (p_h + \lambda_h) d\Omega_h \\ &\quad + \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla u_h \cdot \nabla \lambda_h d\Omega_h + \int_{\Omega_h} A'(0) \nabla(u_h + e_h) \cdot \nabla p_h d\Omega_h. \end{aligned} \quad [10]$$

Soit $\{e_i\}_i$ une base de $\mathcal{V}_h^{(1)}$, un choix particulier (cf. ([6],[10]) de champ de vitesse $V = (e_i, 0)$ dans la formule de la dérivée, permet de calculer la dérivée partielle de $j(\cdot)$ par rapport à la première variable x_i^1 . De même le choix $V = (0, e_i)$ permet de calculer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable x_i^2 .

L'algorithme utilisé pour le déplacement des nœuds est décrit comme suit.

- Données : La précision $\varepsilon = \varepsilon_0$, la triangulation initiale $\mathcal{T}_h^{(0)}$.
- Etape 1 : Résolution du problème (2), (calcul de u_h).
- Etape 2 : Résolution du problème (3), (calcul de e_h , calcul de j).
- Etape 3 : Résolution des problèmes (7) et (8), (calcul de p_h et λ_h).
- Etape 4 : Pour chaque nœud faire
- calcul de $dj(\mathcal{M}, V_1)$ et de $dj(\mathcal{M}, V_2)$ où $V_1 = (e_i, 0)$ et $V_2 = (0, e_i)$;
 - calcul de $\|dj(\mathcal{M}, V)\| = ((dj(\mathcal{M}, V_1))^2 + (dj(\mathcal{M}, V_2))^2)^{\frac{1}{2}}$.
- Etape 5 : On pose $test := \text{maximum de tous les } \|dj(\mathcal{M}, V)\|$;
- Si $test > \varepsilon$
- déplacement des nœuds dans la direction de $dj(\mathcal{M}, V)$, (nouvelle triangulation $\mathcal{T}_h^{(n)}$);
 - aller à Etape 1.
- Sinon STOP.

Il faut préciser que les nœuds intérieurs du domaine peuvent se déplacer dans toutes les directions alors que ceux de la frontière peuvent se déplacer seulement sur la ligne de la frontière où ils se trouvent.

5. Tests numériques :

Les résultats numériques sont donnés à l'aide du logiciel *FreeFem++ v1.44* [7], pour $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, un pas de maillage initial égale à $h = 0.1$, et un $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exemple 1 : La fonction F est la fonction caractéristique du cercle de centre $(1/2, 1/2)$ et de rayon $1/4$.

On prend comme maillage initial $\mathcal{T}_h^{(0)}$ le maillage de pas $h = 0.1$. La figure 1 (gauche) représente le maillage initial. A chaque itération de l'algorithme, les nœuds se déplacent et la norme de l'estimateur hiérarchique diminue (voir Fig.3- à gauche). Dans la figure 1 (droite), se trouve le maillage au bout de 584 itérations. Nous avons reporté dans la figure 3 (à droite), l'écart $\max(e_h) - \min(e_h)$. Nous remarquons qu'au file des itérations, cet écart diminue, ce qui signifie que l'erreur devient de plus en plus "équirépartie" (remarquons qu'il devient presque constant à partir de l'itération 200, et ceci pourrait constituer

un critère pour arrêter les itérations de déplacement).

Exemple 2 : la solution exacte pour cet exemple est $u(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)$.

Les mêmes remarques que l'exemple 1, peuvent être faites ici. Le maillage final (Fig.2- à droite) est obtenu au bout de 143 itérations. Pour cet exemple, dans la pratique, il faut arrêter les itérations à 100 pour avoir un meilleur écart, car au delà de 100^{me} itération, l'écart augmente (voir Fig.4- à droite).

Conclusion : L'analyse décrite ici apporte une justification théorique au déplacement des nœuds qu'on utilisait auparavant d'une manière empirique. On peut dire aussi, que le processus de déplacement des nœuds conduit à une équidistributivité de l'erreur. Nous rappelons comme nous l'avons signalé en Introduction, que ce processus, est une des étapes dans un algorithme d'adaptation de maillage. Pour qu'il soit efficace, il faut l'accompagner avec d'autres opérations (raffinement, déraffinement, retournement d'arrêtes,...).

6. Bibliographie

- [1] B. ACHCHAB, A. AGOUZAL, J. BARANGER, J.F. MAITRE : « Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique : applications aux éléments finis mixtes », Numer. Math., 1998, 80, p. 159-179.
- [2] I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLDT : « Error estimates for adaptive finite element computation », SIAM Numer. Anal., 1978, 15, p.736-754.
- [3] I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLDT : « A posteriori Error estimates for the finite element method », Int. J. Numer.Methh.engrg, 1978, 12, p 1597-1615 .
- [4] R.E. BANK, A. WEISER : « Some a posteriori error estimator for elliptic partial differential equation », Math. Comp., 1985,p. 283-301,
- [5] R.E. BANK, R.K. SMITH : « A posteriori error estimates based on hierarchical bases », SIAM J.Numer.Anal, 1993, Vol.30, N°4, p.921-935.
- [6] M.C. DELFOUR, G. PAYRE, J.P. ZOLESIO : « An optimal triangulation for second order elliptic problems », Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 50, 1985, 231-261.
- [7] F. HECHT, O. PIRONNEAU, K. OHTSUKA : « FreeFem++ Manual », November 4, 2004.
- [8] J. SOKOLOWSKI, J.P. ZOLESIO : « Introduction to Optimization, shape sensitivity analysis » Springer series in computational mathematics, Vol.16, 1992.
- [9] R. VERFURTH : « A review of a posteriori error estimation and adaptive Mesh-Refinement Techniques », Wiley and Tubner, 1996.
- [10] J.P. ZOLESIO : « The Material- (or speed) Derivative methods for Shape Optimisation, in optimisation of distributed parameter structures » E.J.Haug and J.Cea (eds), Sijthof, and Noord-

hoff, 1089-1151, (1981).

- [11] J.P. ZOLESIO : « Les dérivée par rapport aux noeuds des triangularisations et leurs utilisations en identification des domaines », Ann. Sc. Math. Québec, 1984, Vol.8, n° 1, 97-120.



Figure 1. *Maillage initial et maillage final (exemple 1).*



Figure 2. *Maillage initial et maillage final (exemple 2).*

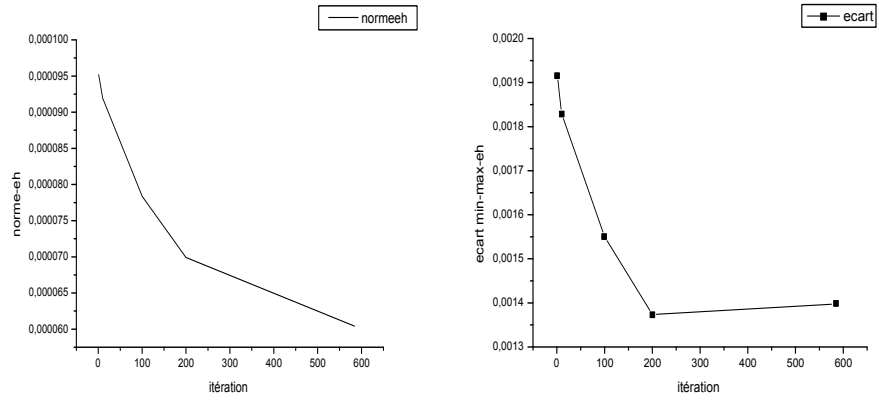


Figure 3. Norme de e_h et l'écart $\max(e_h) - \min(e_h)$ (exemple 1).

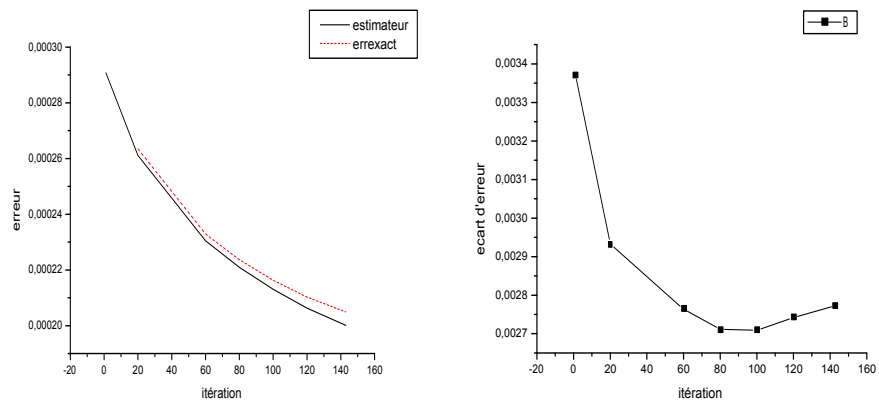


Figure 4. Norme de e_h et l'écart $\max(e_h) - \min(e_h)$ (exemple 2).