

Régularisation de l'équation de Galbrun

pour l'aéroacoustique en régime transitoire

Kamel Berriri* — Anne Sophie Bonnet-Bendhia* — Patrick Joly*

* Projet Poems
UMR 2706 CNRS-INRIA-ENSTA,
Rocquencourt, BP 105,
78153, Le Chesnay Cedex.
FRANCE
Kamel.Berriri@inria.fr

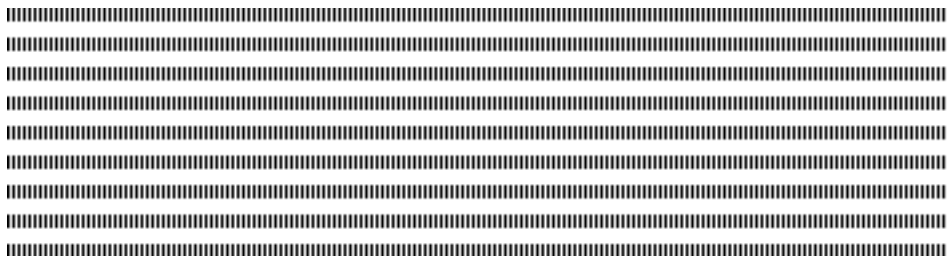


RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous nous intéressons à l'analyse mathématique et à l'approximation numérique de l'équation de Galbrun en régime transitoire dans un conduit rigide. Cette équation modélise la propagation d'ondes acoustiques en présence d'écoulement. Nous montrons pour un écoulement porteur uniforme subsonique que ce modèle a une solution unique. En outre, nous proposons une formulation variationnelle régularisée qui se prête à une approximation par éléments finis de Lagrange.

ABSTRACT. In this paper we are interested in the mathematical and numerical analysis of the time-dependent Galbrun equation in a rigid duct. This equation models the acoustic propagation in presence of flow. We prove the well-posedness of the problem for a subsonic uniform flow. Besides, we propose a regularized variational formulation of the problem suitable for an approximation by Lagrange finite elements.

MOTS-CLÉS : Aéroacoustique, théorème de Hille-Yosida, régularisation, méthode d'éléments finis.

KEYWORDS : Aeroacoustics, Hille-Yosida's theorem, regularisation, finite elements method.



1. Introduction

L'équation de Galbrun [1] est une équation linéaire qui décrit la propagation de petites perturbations dans un fluide en écoulement. Il s'agit d'une E.D.P du second ordre en temps et en espace qui porte sur le vecteur représentant la perturbation de déplacement lagrangien ξ . Ce vecteur représente l'écart entre la position d'une particule fluide dans un écoulement perturbé et sa position dans l'écoulement d'entraînement et s'exprime en fonction des coordonnées Euleriennes (\mathbf{x}, t) .

Les travaux récents sur l'équation de Galbrun ont essentiellement porté sur le régime périodique établi [2]. En revanche la plupart des études mathématiques et numériques du problème de l'aéroacoustique en régime transitoire sont basées sur les équations d'Euler linéarisées. C'est pourquoi il nous a paru intéressant d'étudier l'équation de Galbrun en régime transitoire.

Ce problème présente des difficultés, tant théoriques que numériques. Sur le plan théorique, la difficulté majeure est l'absence d'un cadre fonctionnel naturel pour poser le problème. Sur le plan numérique, une résolution directe du problème, utilisant des éléments finis de Lagrange pour la discrétisation en espace, est instable.

Nous montrons ici qu'une technique de régularisation analogue à celle qui a été développée pour le cas du régime périodique établi permet de lever ces deux difficultés. Nous pouvons ainsi montrer que le problème est bien posé et écrire une méthode d'approximation numérique robuste basée sur :

- une discrétisation par éléments finis de Lagrange en espace,
- un schéma saute-mouton en temps.

La mise en œuvre de cette méthode a été effectuée à l'aide du code MELINA [6].

2. Position du problème

Considérons un conduit rigide bidimensionnel de longueur infinie $\Omega = \mathbb{R} \times]-d, d[$ contenant un fluide compressible. L'écoulement est supposé uniforme, c'est-à-dire que ρ_0 et p_0 sont constantes, et que $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$, avec v_0 constante (voir figure 1). La perturbation de déplacement $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ satisfait l'équation de Galbrun adimensionnée :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla(\operatorname{div} \xi) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \quad (1)$$

$$\xi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \quad (2)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}$, $M = \frac{v_0}{c_0}$ est le nombre de Mach ($-1 < M < 1$), \mathbf{f} est un terme source et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Remarque 1 La vorticité ψ peut admettre une croissance linéaire par rapport à x et à t .

Sans perdre de généralité, on suppose dans la suite que ψ_0 , ψ_1 et $\text{rot } \mathbf{f}$ sont à support compact dans Ω et suffisamment réguliers de sorte que la vorticité ψ est nulle sur les bords du domaine $\partial\Omega$ et appartient à $C^1(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega))$

Nous remplaçons alors le problème (1)-(2)-(3) par le problème régularisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\text{div } \boldsymbol{\xi}) + s \text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}_s & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \text{rot } \boldsymbol{\xi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{\xi}(0, \cdot) = \boldsymbol{\xi}_0(\cdot), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(0, \cdot) = \boldsymbol{\xi}_1(\cdot) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5)$$

où s est un paramètre positif et $\mathbf{f}_s = \mathbf{f} + s \text{rot } \psi$

Ce sont les propriétés d'ellipticité de l'opérateur spatial $-\nabla(\text{div}) + s \text{rot}(\text{rot})$ (qui est égal à $-\Delta$ si $s = 1$) qui permettent de mener l'étude mathématique et l'analyse numérique du problème (5) dans un cadre classique.

Il est clair qu'une solution de problème (1)-(2)-(3) est solution de (5). la réciproque fait l'objet du paragraphe 4.2.

4. Analyse mathématique du problème régularisé

4.1. Existence et unicité de solutions fortes

Dans cette partie nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (5).

On considère l'espace fonctionnel : $\mathcal{H} := X(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$ où

$$X(\Omega) := \{ \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega)^2 / \text{div } \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega), \text{rot } \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \},$$

muni du produit scalaire :

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*)_{\mathcal{H}} = (\text{div } \boldsymbol{\xi}, \text{div } \boldsymbol{\xi}^*) + s (\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \text{rot } \boldsymbol{\xi}^*) + (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}^*) \quad (6)$$

$$\text{avec } \mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})^t, \mathbf{U}^* = (\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\zeta}^*)^t \text{ et } (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}^*) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}^*$$

En utilisant le caractère antisymétrique du l'opérateur ∂_x dans un conduit infini, on peut montrer que :

$$(M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = -(\mathbf{U}, M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x})_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{H}. \quad (10)$$

Par suite des formules de Green

$$(\mathbf{v}, \nabla \phi) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \phi) = \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \phi \, d\sigma \quad (11)$$

$$(\mathbf{v}, \operatorname{rot} \phi) - (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \phi) = \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) \phi \, d\sigma. \quad (12)$$

qui sont valables pour tout $\mathbf{v} \in X(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$, on a pour tout $\mathbf{U} \in D(A_s)$:

$$(\boldsymbol{\zeta}, \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}, \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \, d\sigma = 0, \quad (\text{car } \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega)$$

$$(\boldsymbol{\zeta}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) - (\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\zeta}) \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \, d\sigma = 0, \quad (\text{car } \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \partial \Omega)$$

Enfin nous obtenons :

$$(A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = (7) + (8) + (9) = (-\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \mathbf{U} \in D(A_s).$$

Mais grâce à l'inégalité de Young on a (en notant $\| \cdot \|^2 = (\cdot, \cdot)$) :

$$\begin{aligned} (A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} + \lambda (\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} &= -(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) + \lambda \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \lambda \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \lambda \|\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\|^2 + \lambda s \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}\|^2 \\ &\geq (\lambda - \frac{1}{2}) \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + (\lambda - \frac{1}{2}) \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \end{aligned}$$

d'où on déduit que, pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$,

$$(A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} + \lambda (\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{U} \in D(A_s). \quad (13)$$

Surjectivité : Nous allons montrer que l'opérateur $A_s + \nu I$ est surjectif $\forall \nu > 0$ (on aura donc en particulier $A_s + (\lambda + 1) I$ surjectif pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$), ce qui revient à trouver une solution dans $D(A_s)$ de l'équation : $A_s \mathbf{U} + \nu \mathbf{U} = \mathbf{F}$, où $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})^t$ est un élément quelconque de \mathcal{H} ; ceci équivaut à trouver $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^t \in \mathcal{H}$ tel que :

$$-\boldsymbol{\eta} + M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \in X(\Omega) \quad (14)$$

$$-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) + M \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2 \quad (15)$$

On en déduit alors que

$$l_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geq \nu^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + (\min(1, s) - M^2) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2$$

Autrement dit, la forme bilinéaire $l_s(\cdot, \cdot)$ est coercive dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_0(\Omega)$ pour tout $M^2 < \min(1, s)$.

D'après le théorème de Lax-Milgram, on conclut enfin que l'équation (18) admet une solution pour tout $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{H}$ et $M^2 < \min(1, s)$. □

En multipliant l'équation de Galbrun régularisée par la fonction-test $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$, on peut vérifier que, si $\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$, l'énergie associée au problème (5) :

$$E_s(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + s |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega \quad (22)$$

se conserve au cours de temps.

4.2. Équivalence

Dans cette partie nous nous intéressons à l'équivalence entre le problème régularisé (5) et le problème initial (1)-(2)-(3). Pour montrer cette équivalence, il suffit de montrer que si $\boldsymbol{\xi}$ est une solution du problème régularisé, alors elle vérifie $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\psi}$ sur Ω (la réciproque étant évidente, par construction).

Notons $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ et

$$H(\Omega_T) = \left\{ \mathbf{v} \in C^1(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap C^0(0, T; X(\Omega)), \quad \mathbf{v}(T) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(T) = \mathbf{0} \right\}$$

La solution forte $\boldsymbol{\xi}$ du problème (5) vérifie pour tout $\mathbf{v} \in H(\Omega_T)$:

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \\ & = \int_{\Omega_T} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + s \boldsymbol{\psi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\xi}_1 + 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{t=0} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Considérons alors des fonctions test \mathbf{v} de la forme $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \phi$, avec

$$\phi \in C^2(0, T; H(\operatorname{rot}, \Omega)) \cap C^0(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

de sorte que \mathbf{v} soit dans $H(\Omega_T)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \phi}{\partial t^2} - 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \operatorname{rot} \phi}{\partial t} - s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \Delta \phi - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \operatorname{rot} \phi}{\partial x} \\ & = \int_{\Omega_T} \mathbf{f} \operatorname{rot} \phi - s \boldsymbol{\psi} \Delta \phi - \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \frac{\partial \operatorname{rot} \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\xi}_1 + 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x}) \cdot \operatorname{rot} \phi \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

on trouve finalement :

$$\int_{\Omega_T} |\text{rot } \boldsymbol{\xi} - \psi|^2 = 0,$$

d'où $\text{rot } \boldsymbol{\xi} = \psi$ dans tout Ω .

5. Résolution numérique de l'équation de Galbrun

La résolution numérique en conduit non borné pose des questions délicates liées aux conditions aux limites sur les bords artificiels du domaine de calcul. Cet aspect n'est pas traité dans cette note. Nous proposons ici une méthode numérique de calcul du champ de déplacement dans une portion bornée $\Omega_b :=]-L; L[\times]-d; d[$ du conduit en imposant, pour simplifier, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ sur les bords artificiels latéraux ($x = \pm L$). En effet la solution du problème dans le conduit infini vérifie cette condition pour les temps courts.

5.1. Formulation variationnelle régularisée

Nous commençons par écrire une formulation variationnelle du problème régularisé (avec $\min(1, s) > M^2$). Soit \mathbf{v} une fonction test dans $X_0(\Omega_b)$, avec

$$X_0(\Omega_b) := \{ \boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_b)^2, \text{ tels que } \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ pour } y = \pm d \text{ et } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \text{ pour } x = \pm L \}.$$

En multipliant la première équation du système (5) par \mathbf{v} et en intégrant sur le domaine Ω_b , nous trouvons à l'aide de la formule de Green que $\boldsymbol{\xi}$ vérifie :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = F_s(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X(\Omega_b) \quad (29)$$

avec

$$a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \text{div } \boldsymbol{\xi} \text{ div } \mathbf{v} + s \text{rot } \boldsymbol{\xi} \text{ rot } \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad (30)$$

$$b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v}, \quad (31)$$

$$F_s(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + s \psi \text{rot } \mathbf{v} \quad (32)$$

5.2. Semi-discrétisation en espace

Soit \mathcal{T}_h une triangularisation donnée du domaine de calcul Ω_b telle que $\overline{\Omega_b} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Le paramètre h désigne le pas du maillage. Considérons X_h l'espace de dimension finie

5.4. Énergie discrète et analyse de stabilité

L'étude de la stabilité par une technique énergétique consiste à définir une quantité, analogue à l'énergie continue, qui se conserve au cours d'itérations. On cherche ensuite une condition de type C.F.L pour que cette quantité reste positive et définie énergie.

Définition 2 On définit l'énergie discrète sous la forme suivante :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\xi_h^{n+1} - \xi_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_s(\xi_h^{n+1}, \xi_h^n)$$

Théorème 3 Si $f_s = 0$, l'énergie discrète $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ se conserve au cours de temps ie.

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

DÉMONSTRATION :

Nous reprenons la formulation variationnelle discrète sans terme source :

$$\left(\frac{\xi_h^{n+1} - 2\xi_h^n + \xi_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \eta_h \right) + b \left(\frac{\xi_h^{n+1} - \xi_h^{n-1}}{\Delta t}, \eta_h \right) + a_s(\xi_h^n, \eta_h) = 0 \quad \forall \eta_h \in X_h$$

En choisissant une fonction test de la forme $\eta_h = (\xi_h^{n+1} - \xi_h^{n-1})/(2\Delta t)$, on obtient alors :

$$\frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left\| \frac{\xi_h^{n+1} - \xi_h^n}{\Delta t} \right\|^2 - \left\| \frac{\xi_h^n - \xi_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 + a_s(\xi_h^n, \xi_h^{n+1}) - a_s(\xi_h^n, \xi_h^{n-1}) \right\} = 0$$

Par définition de l'énergie discrète (2), on vérifie aisément que :

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0$$

□

Théorème 4 La condition de stabilité suffisante pour assurer la convergence du schéma numérique (34) est donnée par :

$$\frac{\Delta t^2}{4} \|\mathbb{A}_h\| \leq 1 \quad (35)$$

avec :

$$\|\mathbb{A}_h\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\xi_h \in X_h - \{0\}} \frac{a_s(\xi_h, \xi_h)}{\|\xi_h\|^2}.$$

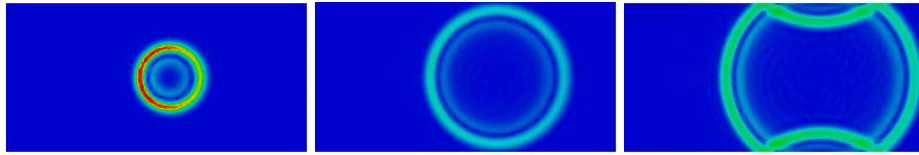


Figure 2 – Norme euclidienne du déplacement à $t_1 = 1.2, t_2 = 2.4$ et $t_3 = 3.3$. Cas $s = 1$.

On voit que la source irrotationnelle rayonne dans toutes les directions du plan en étant convectée dans le sens de l'écoulement. Ainsi le front d'onde aval progresse à la vitesse $1 + M = 1.5$ et le front d'onde amont à la vitesse $1 - M = 0.5$. Dans la direction orthogonale à l'écoulement l'onde se propage à la vitesse du son $c_0 = 1$. et vient de réfléchir sur les parois du conduit.

Importance de la régularisation

Nous vérifions ici que la méthode n'est stable que si l'équation est régularisée.



Figure 3 – Norme euclidienne du déplacement à l'instant $t = 1$. pour $s = 1$ (à gauche) et $s = 0$ (à droite).

Solution rotationnelle

Nous réalisons une autre expérience en considérant comme source des données initiales concentrées au voisinage de l'origine dans un écoulement uniforme $M = 0.5$:

$$\xi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \xi_1(\mathbf{x}) = 0.5 \operatorname{rot} \Phi(\mathbf{x}) + 10 \nabla \Phi(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = e^{-\pi^2(x^2+y^2)}.$$

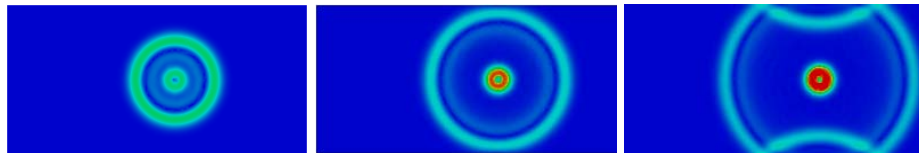


Figure 4 – Norme euclidienne du déplacement à $t_1 = 1.2, t_2 = 2.4$ et $t_3 = 3.3$. Cas $s = 1$.

