

# Ondes dans les milieux poroélastiques

## Analyse du modèle de Biot

Abdelaâziz Ezziani

Projet POems  
INRIA Rocquencourt  
B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex  
FRANCE  
Abdelaaziz.Ezziani@inria.fr

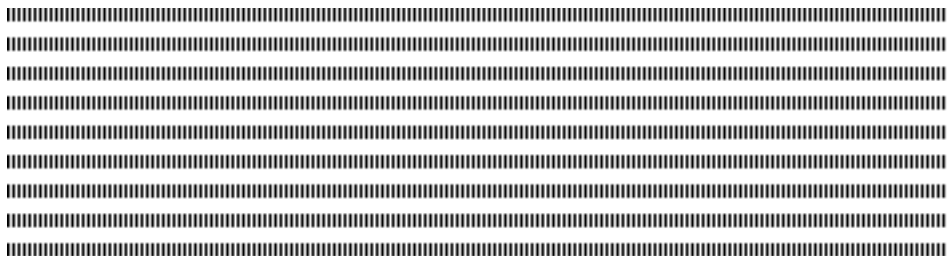


**RÉSUMÉ.** Nous nous intéressons à la modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques. Nous considérons le modèle bi-phasique de Biot. Ce papier est consacré à l'analyse mathématique de ce modèle : résultats d'existence et d'unicité, décroissance de l'énergie et le calcul d'une solution analytique.

**ABSTRACT.** We are interested in the modeling of wave propagation in poroelastic media. We consider the biphasic Biot's model. This paper is devoted to the mathematical analysis of such model : existence and uniqueness result, energy decay result and the calculation of an analytical solution.

**MOTS-CLÉS :** Ondes poroélastiques, modèle de Biot, existence et unicité, dissipation d'énergie, solution analytique.

**KEYWORDS :** Poroelastic waves, Biot's model, existence and uniqueness, energy dissipation, analytical solution.



---

## 1. Introduction

De nombreux sous-sols ne peuvent être considérés comme des matériaux exclusivement solides. Ce sont souvent des milieux poreux c'est-à-dire constitués de solides perforés par une multitude de petits trous, appelés pores, occupés par un fluide. C'est notamment souvent le cas des réservoirs pétroliers. Il est clair que l'analyse de résultats par méthodes sismiques de l'exploration de tels milieux doit tenir compte du fait qu'une onde se propageant dans un tel milieu rencontre une succession de phases solide et fluide : on parle de milieu poro-élastique. Lorsque la distance moyenne entre les pores est petite devant la longueur d'onde, plutôt que de considérer un tel milieu comme un milieu complètement hétérogène, il est légitime de faire appel, au moins localement, à la théorie de l'homogénéisation [10, 17], on aboutit alors au modèle de Biot [5, 6, 7] qui fait intervenir comme inconnues non seulement le champ de déplacement dans le solide mais aussi la pression dans le fluide. La principale caractéristique de ce modèle est qu'aux ondes P et S dans un solide se rajoute une onde "lente", qu'on pourrait aussi qualifier de "fluide".

Ce papier est consacré à l'analyse mathématique du modèle de Biot. Les méthodes numériques pour l'approximation de ce modèle seront décrites dans un papier en préparation [2]. Ici, on s'intéresse essentiellement à la question de l'existence et l'unicité de la solution forte dans le cas 3D et anisotrope et le calcul d'une solution de référence.

Dans la première section, nous montrerons un résultat d'existence et d'unicité de la solution forte obtenue par le biais de la théorie des semi-groupes, ce résultat semble être original et différent de celui de J. E. Santos [19] qui est basé sur un autre approche : dans ce papier l'auteur montre l'unicité de la solution faible pour le problème isotrope à l'aide de la méthode de Galerkin. Dans ce cadre nous citons aussi les travaux de H. Barucq et al. [1] pour une classe 1D du problème de Biot non linéaire. Dans une deuxième courte section, afin de montrer que le modèle de Biot conduit à un mécanisme dissipatif, nous établirons un résultat de la décroissance d'énergie, voir théorème 4.1. Enfin, dans la dernière section nous déterminerons une solution analytique du problème modèle dans un milieu infini en dimension 2. On se place dans le cas d'un milieu homogène isotrope sans dissipation avec une source de pression ponctuelle en espace et en temps. Nous utiliserons la méthode de Cagniard-de Hoop [11, 13] pour déterminer la fonction de Green associée au problème modèle. Le principe de la méthode consiste à appliquer aux inconnues la transformation de Laplace en temps et celle de Fourier suivant l'une des variables d'espace ( $x$  ou  $y$ ). Une fois le problème est résolu dans l'espace de Laplace-Fourier, nous revenons en espace physique temps-espace en manipulant les contours complexes. Cette étude préliminaire nous sera utile surtout pour l'étude et la validation du schéma numérique développé dans [2].

---



- $f_u$  et  $f_w$  sont des densités de source,
- $u_0, w_0, u_1$  et  $w_1$  sont des données initiales.

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :

- 1)  $\rho, \rho_f, \rho_w, \mathcal{K}, m, \beta$  et  $C$  sont mesurables,
- 2) il existe  $c_-$  and  $c_+$ , deux constantes positives, telles que :

$$0 < c_- \leq \rho, \rho_f, \rho_w, \mathcal{K}, m, \beta \leq c_+ < +\infty \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

- 3) le tenseur  $C$  satisfait :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{klij} \quad \forall i, j, k, l = 1, d, \\ \left\{ \begin{array}{l} \exists M_-, M_+ > 0 \text{ tels que :} \\ \forall \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d), 0 < M_- |\sigma|^2 \leq C\sigma : \sigma \leq M_+ |\sigma|^2 \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^d, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) &= \{ \sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i, j = 1, d \}, \\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) &= \{ \sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d / \sigma \text{ est linéaire } \}, \\ \sigma : \tilde{\sigma} &= \sum_{ij} \sigma_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \text{ et } |\sigma| = (\sigma : \sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall (\sigma, \tilde{\sigma}) \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)]^2, \\ (C\sigma)_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \forall (C, \sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

**Remarque 2.1** Ici, nous avons écrit la loi (1c) dans un cadre assez général, dans le cas isotrope, le tenseur  $C$  vérifie :  $(C\sigma)_{ij} = \lambda_0 \sigma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \sigma_{ij}$ , où  $\mu$  est le module de cisaillement,  $\lambda_0 = \lambda_f - \beta^2 m$  est le coefficient de Lamé et  $\lambda_f$  est le coefficient de Lamé dans le milieu saturé.

---

### 3. Résultat d'existence et d'unicité

On note  $M$  la matrice définie par :

$$M = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \rho_w \end{bmatrix}.$$

**Remarque 3.1** La matrice  $M$  est symétrique définie positive grâce aux conditions physiques [8] :  $a > 1$  et  $\phi < 1$ .

On introduit les variables  $\tilde{u}_s = \partial_t u_s$  (la vitesse dans le solide) et  $\tilde{w} = \partial_t w$  (la vitesse de filtration). En posant  $U = (u_s, w, \tilde{u}_s, \tilde{w}, p)^t$ , le problème (1) se réécrit alors sous la forme d'un système d'évolution du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \Lambda U = F, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4)$$



Utilisant la formule de Green pour les trois intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \cdot (C\varepsilon(\mathbf{u})) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx &= - \int_{\mathbf{R}^d} C\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, dx, \\ \int_{\mathbf{R}^d} \nabla(\beta p) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx &= - \int_{\mathbf{R}^d} \beta p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx, \quad \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}} p \, dx = - \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla p \, dx, \end{aligned}$$

on obtient

$$(\Lambda U, U)_H = - \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx - \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \, dx + \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{K} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \, dx.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &= \int_{\mathbf{R}^d} |\mathbf{u}|^2 \, dx + \int_{\mathbf{R}^d} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx + \int_{\mathbf{R}^d} |\mathbf{w}|^2 \, dx + \int_{\mathbf{R}^d} \rho |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \, dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^d} \rho_w |\tilde{\mathbf{w}}|^2 \, dx + 2 \int_{\mathbf{R}^d} \rho_f \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \, dx. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\Lambda U, U)_H + \lambda \|U\|_H^2 \geq \int_{\mathbf{R}^d} [\lambda |\mathbf{u}|^2 + \lambda |\mathbf{w}|^2 + \lambda \rho |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \lambda \rho_w |\tilde{\mathbf{w}}|^2 + 2\lambda \rho_f \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{w}}] \, dx.$$

Ce qui montre que  $\Lambda + \lambda I$  est monotone dès que  $\lambda > \max(\rho^{-1/2}, \rho_w^{-1/2})/\sqrt{2}$ .

- **Surjectivité.** montrons que  $\Lambda + \nu I$  est surjective pour tout  $\nu > 0$ . Ceci équivaut à montrer que pour tout  $F = (\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_w, \mathbf{f}_{\tilde{u}}, \mathbf{f}_{\tilde{w}}, f_p)^t \in H$ , il existe  $U = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, p)^t \in D(\Lambda)$  solution du système :

$$\nu \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_u, \tag{7a}$$

$$\nu \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}_w, \tag{7b}$$

$$\nu \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} \nabla \cdot (C\varepsilon(\mathbf{u})) - \nabla(\beta p) \\ -\mathcal{K} \tilde{\mathbf{w}} - \nabla p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\tilde{u}} \\ \mathbf{f}_{\tilde{w}} \end{bmatrix}, \tag{7c}$$

$$m\beta \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}} + \nu p = f_p. \tag{7d}$$

Si le système (7) a une solution, il est facile d'éliminer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $p$  et de voir que  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}$  doivent vérifier l'équation :

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} \nabla \cdot (C\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})) + \nabla(m\beta^2 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla(m\beta \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) \\ \nabla[m\beta \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}] \end{bmatrix} + \nu^2 M \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \\ + \frac{\nu}{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \nu M \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\tilde{u}} \\ \mathbf{f}_{\tilde{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla \cdot (C\varepsilon(\mathbf{f}_u)) - \nabla(\beta f_p) \\ -\nabla f_p \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$



















