# Régularisation d'un problème d'obstacle bilatéral

B. Achachab(*) A. Addou(**), J. Zahi(*)

(*)Laboratoire de Modélisation et calcul économique, Université Hassan I, Settat, Maroc.
(**)Département de Mathématiques et Informatique, Université Mohammed I, Oujda, Maroc.
achchab@yahoo.fr, addou@science.univ-oujda.ac.ma, zahi_ja@yahoo.fr

**RÉSUMÉ.** Le but essentiel de ce travail est la résolution d'un problème d'obstacle bilatéral à l'aide d'une méthode de régularisation .

**ABSTRACT.** The main objective of this work is the resolution of an bilateral obstacle problem by means of the regularization method.

**MOTS-CLÉS :** régularisation, inéquation variationnelle, obstacle, problème, bilatéral.

**KEYWORDS :** regularization, variational inequality, obstacle, problem, bilateral.

# 1. Introduction

Soient $\Omega$ un domaine borné de $\mathrm{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulière, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\psi_1$,$\psi_2 \in H^1(\Omega)$, tels que

$$Tr(\psi_1) \leq g \leq Tr(\psi_2) \text{ sur } \Gamma.$$

On considère le problème d'inéquation variationnelle - dit problème d'obstacle bilatéral - :
Trouver

$$u \in K = \{v \in H^1(\Omega) : v = g \text{ sur } \partial\Omega, \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p. dans } \Omega\} \qquad [1]$$

telle que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) + \langle f, v-u\rangle \geq 0 \ \ \forall v \in K \qquad [2]$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Il est bien connu que ce problème admet une solution unique (voir D. Kinderlehrer et G. Stampacchia).

On suppose que $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2 \in L^2(\Omega)$, avec ces hypothèses, nous pouvons écrire un autre problème d'inéquation variationnelle sans contraintes, équivalent à $(1)-(2)$.

Ce problème èquivalent fait intervenir un terme non differentiable. Notre idée de régularisation consiste à remplacer ce terme par un autre qui est differentiable, on obtient ainsi une famille de problèmes d'équations aux dérivées partielles dont la suite des solutions converge vers la solution du problème initial.

Par la méthode de dualité par les fonctions conjuguées (voir I. Ekeland, R. Temam) on fournit une estimation a-posteriori de l'erreur qui est desirée pour l'implementation pratique de la méthode de régularisation.

**Théorème 1** :
*$u$ est solution du problème $(P_{\psi_{1,2}})$ si et seulement si $w = u - \psi_1$ est solution du problème d'inéquation variationnelle suivant :*

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } w \in H_k^1(\Omega) \\ a(w, v-w) + \varphi(v) - \varphi(w) + (H^-, v-w) \geq 0 \textit{ pour tout } v \in H_k^1(\Omega) \end{array}\right. \quad [4]$$

*où $\varphi$ est la fonctionnelle définie par*

$$\varphi(v) = (F^-, (v+\psi)^-) + (H^+, v^+) \quad v \in H_k^1(\Omega),$$

*et $H = F^+ - \Delta\psi$*

**Preuve :**(voir A. Addou, E.B. Mermri)

## 2.2. Régularisation de $(P)$

L'expression de la fonctionnelle $\varphi$ nous fait penser à prendre $\varphi_\varepsilon$ sous la forme suivante :

$$\varphi_\varepsilon(v) = \int_\Omega H^+\phi_\varepsilon(v) + F^-\psi_\varepsilon(v+\psi), (\varepsilon > 0, \text{ destiné à tendre vers zero}).$$

Or $\phi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon$ sont deux fonctions définies de R vers R, dérivables et convexes vérifiant :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon(t) = t^+ \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(t) = t^-$$

**Definition 1** :
*Le problème régularisé de $(P)$ est :*

$$(P_\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} w_\varepsilon \in H_k^1(\Omega) \\ a(w_\varepsilon, v - w_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(v) - \varphi_\varepsilon(w_\varepsilon) + \langle H^-, v - w_\varepsilon\rangle \geq 0 \quad \forall v \in H_k^1(\Omega) \end{array}\right. \quad [5]$$

*le problème $(P_\varepsilon)$ admet une solution unique (voir D. Kinderlehrer et G. Stampacchia ).*

A présent on peut proposer les trois exemples suivants de $\varphi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon$ qui vérifient les conditions ci-dessus :

$$\phi_\varepsilon^1(t) = \left\{\begin{array}{ll} t - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } t \geq \varepsilon \\ \frac{t^2}{2\varepsilon} & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{array}\right.$$

$$\phi_\varepsilon^2(t) = \left\{\begin{array}{ll} t & \text{si } t \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}(\frac{t^2}{\varepsilon} + \varepsilon) & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } t \leq 0. \end{array}\right.$$

**Lemme 3** :

*On a :*

$$|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)| \leq c_1\varepsilon \textit{ et } |\psi_\varepsilon(t) - \psi(t)| \leq c_2\varepsilon \quad \forall t \in \boldsymbol{R}, . \qquad [9]$$

*pour* $c_1$, $c_2$ *deux constantes indépendantes de* $\varepsilon$.

**Proposition 1** :

*Soit* $w_\varepsilon$ *(resp* $w$*) la solution de* $(P_\varepsilon)$ *(resp* $(P)$*), alors on a :* $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ *converge vers* $w$ *dans* $H^1(\Omega)$.

**Preuve :**

Puisque les $\phi_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon$ vérifient l'inégalité $(9)$, alors d'aprés les Lemmes $1$ et $2$, on a la convergence $w_\varepsilon \to w$ quand $\varepsilon \to 0$ dans $H^1(\Omega)$.

Prenant $v = w_\varepsilon$ (resp $v = w$) dans l'inéqualité du problème $(P)$ (resp $(P_\varepsilon)$), on obtient :

$$a(w - w_\varepsilon, w - w_\varepsilon) \leq \varphi(w_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(w_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(w) - \varphi(w).$$

alors

$$\| w - w_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\varphi(w_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(w_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(w) - \varphi(w)|.$$

Donc

$$\| w - w_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\varphi(w_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(w_\varepsilon)| + |\varphi_\varepsilon(w) - \varphi(w)|.$$

D'aprés l'inégalité $(6)$, on a :

$$\| u - u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2\int_\Omega (F^- c_1 + H^+ c_2)\varepsilon dx.$$

Par conséquent, on obtient l'éstimation a priori suivante :

$$\| u - u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leq (\int_\Omega 2(F^- c_1 + H^+ c_2))^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varepsilon} dx$$

où

$$g^*(x,y) = \sup_{s\in\mathbf{R}^N}\{ys - g(x,s)\}.$$

Pour le problème $(P)$ on prend :

$$\begin{array}{l} V = H^1(\Omega), \\ Y = Y^* = (L^2(\Omega))^n \times L^2(\Omega) \\ Lv = (\nabla v, v) \\ J(v, Lv) = H(v) + G(Lv) \\ H(v) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } v = k \text{ sur } \Gamma \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{array} \right. \\ G(y) = \int_\Omega \frac{1}{2}|y_1|^2 + H^+ y_2^+ + F^-(y_2+\psi)^- + H^- y_2 dx \end{array}$$

où $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in (L^2(\Omega))^n$ et $y_2 \in L^2(\Omega)$, de même on utilise cette notation pour $y^* \in Y^*$.
D'aprés le Théorème 1, la fonctionnelle conjuguée de $J$ est donnée par :

$$J^*(-y^*, L^*y^*) = H^*(L^*y^*) + G^*(-y^*)$$

donc le problème $(P)$ peut s'écrire sous la forme $(1.10)$, c'est à dire :

$$u \in H^1(\Omega), \;\; J(u, Lu) = \inf_{v\in H^1(\Omega)} J(v, Lv).$$

**Lemme 4** :
*Pour $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in (L^2(\Omega))^n$ et $y_2 \in L^2(\Omega)$, on a :*

$$J^*(-y^*, L^*y^*) = \left\{ \begin{array}{ll} \leq \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{2}|y_1^*|^2 + \nabla k y_1^* + k y_2^* dx & \textit{si } -div y_1^* + y_2^* = 0 \textit{ dans } \Omega \\ & \textit{et } y_2^* \geq -F^-, y_2^* \geq -H^+ \\ \infty & \textit{ailleurs.} \end{array} \right. \quad [11]$$

**Preuve :**
On a :

$$\begin{array}{rcl} H^*(L^*y^*) & = & \displaystyle\sup_{v\in H^1(\Omega)} \{\langle Lv, y\rangle - H(v)\} \\ & = & \displaystyle\sup_{v\in H^1_k(\Omega)} \int_\Omega (\nabla v y_1^* + v y_2^*) dx \\ & = & \displaystyle\int_\Omega (\nabla k y_1^* + k y_2^*) dx + \sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \int_\Omega (\nabla v y_1^* + v y_2^*) dx \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_\Omega (\nabla k y_1^* + k y_2^*) dx & \text{si } -div y_1^* + y_2^* = 0 \text{ dans } \Omega \\ \infty & \text{ailleurs} \end{array} \right. \end{array}$$

**Proposition 2** :

*Si $w_\varepsilon$ et $w$ sont les solutions de $(P_\varepsilon)$ et $(P)$ respectivement alors on a l'estimation a-posteriori suivante :*

$$\frac{1}{2} \parallel \nabla(w_\varepsilon - w) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega H^+ w_\varepsilon^+ + F^-(w_\varepsilon + \psi)^- - w_\varepsilon(H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi)). \quad [12]$$

**Preuve :**

Puisque $\phi_\varepsilon$ est différentiable l'inéquation de $(P_\varepsilon)$ est équivalente à :
$w_\varepsilon \in H^1_k(\Omega)$ :

$$a(w_\varepsilon, v) + \int_\Omega (H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^-) v dx = 0 \quad [13]$$

d'où $w_\varepsilon$ vérifie le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^- = 0 \text{ dans } \Omega \\ w_\varepsilon = k \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Si on pose

$$y_1^* = \nabla w_\varepsilon \text{ et } y_2^* = (H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^-) w_\varepsilon.$$

alors on a :

$$-div y_1^* + y_2^* = 0 \text{ et } y_2^* \geq -F^-, y_2^* \geq -H^+$$

Donc d'aprés le lemme $5$ on a une estimation a-posteriori de l'erreur :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \parallel \nabla(w_\varepsilon - w) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \quad & \int_\Omega \nabla w_\varepsilon \nabla(w_\varepsilon - k) + H^+ w_\varepsilon^+ + F^-(w_\varepsilon + \psi)^- + H^- w_\varepsilon \\ & + k(H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^-). \end{aligned} \quad [14]$$

Si on choisit $v = w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ dans $(13)$ on aura :

$$a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \int_\Omega (H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^-) w_\varepsilon dx = 0$$

d'où

$$\int_\Omega \nabla w_\varepsilon \nabla(w_\varepsilon - k) + \int_\Omega (H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi) + H^-)(w_\varepsilon - k) = 0$$

L'estimation a-posteriori de l'erreur $(14)$, devient :

$$\frac{1}{2} \parallel \nabla(w_\varepsilon - w) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega H^+ w_\varepsilon^+ + F^-(w_\varepsilon + \psi)^- - w_\varepsilon(H^+\phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) + F^-\psi'_\varepsilon(w_\varepsilon + \psi)).$$