

# Simulation de l'onde de crue via un modèle numérique d'eau peu profonde basé sur la méthode des caractéristiques<sup>1</sup>

F. El Dabaghi<sup>a</sup> — A. El Kacimi<sup>ab</sup> — B. Nakhle<sup>ac</sup>

<sup>a</sup>INRIA Rocquencourt B.P. 10578153, Le Chesnay Cedex

<sup>b</sup>Ecole Mohamadia d'Ingenieurs, B.P. 765, Rabat, Maroc

<sup>c</sup>Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Beyrouth, Univ. St-Joseph, B.P. 11-0514, Riad El Solh, Liban



**RÉSUMÉ.** Ce travail concerne la simulation numérique de la propagation des crues. Ce phénomène peut être décrit par les équations d'eau peu profonde ou de Saint-Venant, écrites sous forme non conservative en formulation vitesse-hauteur  $(\mathbf{u}, H)$ . L'approximation numérique du modèle repose sur la méthode des caractéristiques pour la discrétisation temporelle. Le système stationnaire obtenu est de type Quasi-Stokes, et il est résolu par un algorithme de gradient conjugué Uzawa préconditionné, basé sur la méthode des éléments finis  $P_1/P_1$  pour l'approximation spatiale. Des résultats numériques concernant des simulations d'écoulements subcritiques dans plusieurs type de conduites sont présentés.

**ABSTRACT.** This work deals with the numerical simulation of flood waves propagation. This phenomena can be described by the non conservative form of shallow water or St-Venant equations, in water velocity-depht formulation  $(\mathbf{u}, H)$ . The numerical approximation of the model is based on the Characteristics method for the time discretization. The obtained steady system is of Quasi-Stokes type, and it is resolved by a preconditioned Uzawa conjugated gradient algorithm, combined to  $P_1/P_1$  finite element for the spatial approximation. Some numerical results describing subcritical flow on various fluid domains are given

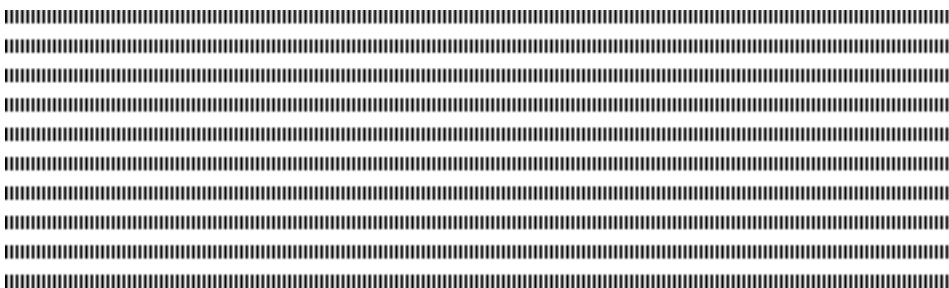
**MOTS-CLÉS :** équations d'eau peu profonde, caractéristiques, élément fini, onde de crue.

**KEYWORDS :** shallow water equations, charactersitics, finite element, wave flood.



---

1. Ce travail a bénéficié du support du projet euro-méditerranéen WADI, des programmes d'actions Intégrées CMIFM MA/01/03., CMEP 01 MDU 529 et PLATON 05572UB.



## 1. Motivation et position du problème

Les catastrophes naturelles dues aux ondes de crues touchent plusieurs régions du monde, et notamment les pays de la méditerranée. En période de crue, le débit de la plupart des rivières dépasse largement la capacité du lit mineur où elles sont habituellement confinées : elles débordent et envahissent alors ces plaines d'inondations. L'écoulement dans de telles rivières devient subitement beaucoup plus complexe : en effet, de relativement uniforme, le champ des vitesses y devient hautement disparate.

Face à ces phénomènes physiques complexes, plusieurs recherches ont été effectuées ces dernières années dans le domaine de l'environnement, pour le développement des simulateurs d'écoulements d'eau peu profonde, notamment pour les crues et les inondations.

Le but de ce travail est de présenter des cas de simulation d'onde de crues, à l'aide d'un modèle numérique d'eau peu profonde basé sur les équations de Saint-Venant. La mise en oeuvre numérique repose sur la méthode des caractéristiques (M.O.C.) pour la discrétisation temporelle, combinée à la méthode des éléments finis (E.F.)  $P_1/P_1$  pour l'approximation spatiale.

L'approche E.F. n'est plus à justifier en particulier pour son degré de flexibilité bien élevé dans la représentation des domaines d'écoulement complexes (voir Luetich et al. [7], Galland et al. [6], El Dabaghi et al. [5]). L'utilisation de la méthode M.O.C. (voir [3], [4], [8]) est déterminante dans ce genre d'écoulement où la convection est dominante par rapport à la diffusion ; en effet cette approche, consistant à discrétiser la dérivée Lagrangienne au long des trajectoires caractéristiques, conduit à un schéma décentré et stable pour des choix de grands et raisonnables pas de temps.

Les équations bidimensionnelles d'eau peu profonde dites de St-Venant sont obtenues par intégration suivant la verticale de l'équation de continuité et les équations de mouvement du système Navier-Stokes incompressible 3D. En considérant la hauteur petite par rapport aux dimensions horizontales, et sous les hypothèses classiques de la faible variation de la vitesse verticale et des petites variations des vitesses horizontales par rapport à la profondeur, on obtient (voir [1] par exemple) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + g \nabla z &= -\frac{g}{C^2 H} |\mathbf{u}| \mathbf{u} - \frac{\nabla p_a}{\rho} + \frac{\bar{\tau}}{\rho H} + \mathbf{l} \times \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u} = (u, v)^\perp$  sont les vitesses horizontales moyennées par rapport à la profondeur  $H$ ,  $z$  est l'élévation de la surface d'eau suivant un niveau de référence,  $H = z - z_b$  est la profondeur d'eau,  $z_b$  étant l'élévation du fond suivant la même référence (voir figure 1),  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique supposé constant,  $g$  est

l'accélération de la pesanteur,  $C$  est le coefficient de Chezy,  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y)^\perp$  est la contrainte du vent,  $\mathbf{l} \times \mathbf{u} = (-lv, lu)^\perp$ ,  $l$  étant le paramètre de Coriolis,  $p_a$  est la pression atmosphérique et  $\rho$  est la densité de l'eau supposée constante.

Ce système est complété par les conditions initiales :  $H(\cdot, 0) = H_0$ ,  $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$ .

Le système des équations aux dérivées partielles (1) est résolu sur un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  (voir figure 1).

Sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , on définit la normale extérieure  $\mathbf{n}$  et on considère les conditions aux limites suivantes :

- Condition d'adhérence sur la frontière solide  $\Gamma_s$  :  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_s$ .
- Vitesses données à l'entrée sur  $\Gamma_0$  :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$  sur  $\Gamma_0$
- Une condition mixte de type Fourier à la sortie  $\Gamma_1$  :

$$\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - gz \mathbf{n} = -gz_d \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_1.$$

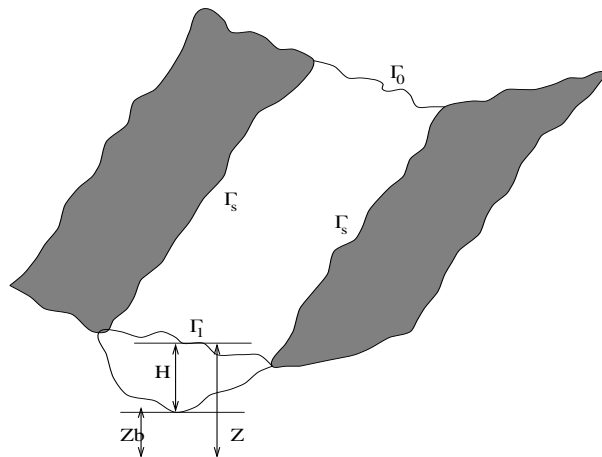


Figure 1. bathymétrie et domaine fluide

## 2. Approximation numérique

On rappelle ici le principe de la méthode des caractéristiques qui consiste à approcher la dérivée totale d'une fonction  $S$  au temps  $t^{n+1}$  par

$$\frac{dS}{dt}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \simeq \frac{S(\mathbf{x}, t^{n+1}) - S(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}, t^n), t^n)}{\Delta t} \quad (2)$$

où  $\mathbf{X}^n = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}, t^n)$  est la position au temps  $t^n$  de la particule qui se trouve au point  $\mathbf{x}$  au temps  $t^{n+1}$  et  $\mathbf{X}^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; \tau)$  est la solution de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t) &= \mathbf{u}^n(\mathbf{X}^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t)), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \\ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^{n+1}) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Soit  $\bar{\mathbf{u}}$  un relèvement dans  $\mathbb{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  des conditions aux limites Dirichlet sur  $\mathbf{u}$ . Introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0, \text{ sur } \Gamma_s \cup \Gamma_0 \}, \\ \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{u}}} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{V}, \quad Q = L^2. \end{aligned}$$

En se servant de (2), la formulation variationnelle du problème (1) discrétisé en temps est donnée par :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \mathbf{v}, q \in \mathbf{V} \times Q, \text{ trouver } (\mathbf{u}^{n+1}, H^{n+1}) \text{ dans } \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{u}}} \times Q \text{ tels que} \\ \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + \mu (\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + \\ \left( C_f \frac{|\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^{n+1}}{H^n}, \mathbf{v} \right) - g (\nabla \cdot \mathbf{v}, H^{n+1}) = \left\langle -g \nabla z_b + \frac{\mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n}{\Delta t}, \mathbf{v} \right\rangle_{V^*, V}, \\ \left( \frac{H^{n+1}}{\Delta t}, q \right) + (H^n \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, q) = \left( \frac{H^n \circ \mathbf{X}^n}{\Delta t}, q \right), \end{array} \right.$$

où  $H^{n+1}$  et  $\mathbf{u}^{n+1}$  sont les approximations respectives de  $H$  et  $\mathbf{u}$  au temps  $t^{n+1}$ . Les hypothèses suivantes assurent l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (P) :

$$\begin{aligned} H^n &\in L^\infty(\Omega), \quad H^n \geq \underline{H}_0 > 0, \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^n &\in (L^2(\Omega))^2, \quad -g \nabla z_b + \frac{\mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n}{\Delta t} \in \mathbf{V}^*, \quad H^n \circ \mathbf{X}^n \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{A_1}$$

**Théorème 1** *Sous l'hypothèse (A<sub>1</sub>), le problème (P) admet une solution unique.*

**Preuve.** Le raisonnement est analogue à celui développé dans [3], [8]. Il est basé sur le fait qu'on peut exprimer  $H^{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{u}^{n+1}$  à partir de l'équation de continuité discrète de (P) de la manière suivante :

$$H^{n+1} = H^n \circ \mathbf{X}^n - \Delta t H^n \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$$

En remplaçant l'expression de  $H^{n+1}$  dans l'équation de mouvement discrète de  $(\mathcal{P})$ , on se ramène à un problème linéaire elliptique en  $\mathbf{u}$ , où le cadre du théorème de Lax-Millgram est applicable, moyennant l'hypothèse  $(A_1)$ . ■

On supposera pour simplifier les notations que  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ . Soit  $T_h$  une triangulation régulière du domaine  $\Omega$  en des éléments  $T$ , avec  $h = \max_{T \in T_h} h_T$  et  $h_T = \text{diam}(T)$ .

Soit  $W_{1,h}$  le sous espace de  $H^1(\Omega)$  défini sur cette triangulation, et constitué des fonctions polynômiales par morceaux dans  $\mathbb{R}^2$  de degré inférieur ou égal à 1.

Posons  $\mathbf{V}_h = (W_{1,h} \times W_{1,h}) \cap \mathbf{V}$  and  $Q_h = W_{1,h} \cap Q$ . On définit ensuite le problème  $(\mathcal{P}_h)$  approchant  $(\mathcal{P})$  par :

pour  $\mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , trouver  $(\mathbf{u}_h^{n+1}, H_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  tels que :

$$(\mathcal{P}_h) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\mathbf{u}_h^{n+1}}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + \mu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + \\ \left( C_f \frac{|\mathbf{u}_h^n| \mathbf{u}_h^{n+1}}{H_h^n}, \mathbf{v} \right) - g (\nabla \cdot \mathbf{v}, H_h^{n+1}) = \left\langle -g \nabla z_b + \frac{\mathbf{u}_h^n \circ \mathbf{X}_h^n}{\Delta t}, \mathbf{v} \right\rangle_{V^*, V}, \\ \left( \frac{H_h^{n+1}}{\Delta t}, q \right) + (H_h^n \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, q) = \left( \frac{H_h^n \circ \mathbf{X}_h^n}{\Delta t}, q \right), \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{X}_h^n = \mathbf{X}_h^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^n)$ ,  $\mathbf{X}_h^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; \cdot)$  étant solution du système différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_h^n}{dt}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t) &= \mathbf{u}_h^n(\mathbf{X}_h^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t)), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \\ \mathbf{X}_h^n(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^{n+1}) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

On note ici par  $\mathbf{U}$ ,  $H$  et  $H^n$  les vecteurs associés respectivement aux valeurs nodales de  $\mathbf{u}_h^{n+1}$ ,  $H_h^{n+1}$  et  $H_h^n$ , suivant les bases éléments finis usuelles  $\mathbf{v}_i$  de  $\mathbf{V}_h$  et  $q_i$  de  $Q_h$ .

Le problème  $(\mathcal{P}_h)$  s'écrit d'une manière équivalente sous la forme algébrique suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ \bar{B} & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_u \\ S_H \end{pmatrix}, \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \left( \frac{\mathbf{v}_i}{\Delta t}, \mathbf{v}_j \right) + \mu (\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j) + \left( C_f \frac{|\mathbf{u}_h^n| \mathbf{v}_i}{H_h^n}, \mathbf{v}_j \right), \quad B_{l,j} = -g (\nabla \cdot \mathbf{v}_j, q_l), \\ \bar{B}_{i,k} &= -g (H_h^n \nabla \cdot \mathbf{v}_i, q_k), \quad C_{l,k} = g \left( \frac{q_l}{\Delta t}, q_k \right), \\ \mathbf{S}_{u,j} &= \left\langle -g \nabla z_b + \frac{\mathbf{u}_h^n \circ \mathbf{X}_h^n}{\Delta t}, \mathbf{v}_j \right\rangle_{V^*, V}, \quad S_{H,k} = -g \left( \frac{H_h^n \circ \mathbf{X}_h^n}{\Delta t}, q_k \right). \end{aligned}$$

On approche la matrice  $\bar{B}$  comme suit :  $\bar{B}_{i,k} = -gH_i^n (\nabla \cdot \mathbf{v}_i, q_k)$  avec  $H_i^n$  étant la valeur de  $H^n$  au noeud  $i$ . Ceci implique que  $\bar{B} = DB$  avec  $D$  une matrice diagonale tel que :

$$D_{i,i} = H_i^n. \quad (4)$$

Dans le but d'établir un résultat d'existence et d'unicité pour  $(\mathcal{P}_h)$ , on supposera de plus que :

$$H_h^n \geq \underline{H}_0 > 0, \text{ p.p. dans } \Omega \quad (A_2)$$

**Théorème 2** *Sous l'hypothèse  $(A_2)$ , le problème  $(\mathcal{P}_h)$  admet une solution unique.*

**Preuve.** Compte tenu de  $(A_2)$  la matrice diagonale  $D$  est définie positive, et donc comme  $\bar{B}\mathbf{U} - CH = S_H$ , on a  $B\mathbf{U} - D^{-1}CH = D^{-1}S_H$ . De plus on a  $\mathbf{U} = A^{-1}(\mathbf{S}_u - B^T H)$ , et par la suite

$$(BA^{-1}B^T + D^{-1}C)H = BA^{-1}\mathbf{S}_u - D^{-1}S_H. \quad (5)$$

Il suffit alors de montrer que le système (5) est inversible. En effet, la matrice  $BA^{-1}B^T$  est positive du fait que  $A$  l'est, la matrice  $D^{-1}C$  est définie positive compte tenu de l'hypothèse  $(A_2)$  et du fait que  $C$  l'est aussi. ■

REMARQUE. — L'analyse de l'erreur a priori en temps et en espace, associé au schéma  $(\mathcal{P}_h)$  est effectuée dans ([3], [4], [8]). On montre sous des hypothèses convenables sur la régularité de la solution du problème continu et pour une triangulation quasi-uniforme que

$$\|H_h^n - H^n\|_0 + \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_1 \leq C(\Delta t + h), \quad (6)$$

où  $(\mathbf{u}^n, H^n)$  est la solution du problème continue à l'instant  $t_n = n\Delta t$ . Les notations  $\|\cdot\|_0$  et  $\|\cdot\|_1$  désignent respectivement les normes usuelles dans  $L^2(\Omega)$  et  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ .

---

### 3. Algorithme du gradient conjugué préconditionné Uzawa

Dans le but de résoudre numériquement le problème (3), on propose d'utiliser la méthode du gradient conjugué Uzawa :

**Etape 1.** Initialisation

- Choisir  $H_0$
- Calculer  $r_0 = S_H - \bar{B}U_0 + CH$ , avec  $U_0$  solution de  $AU_0 = \mathbf{S}_u - BH_0$
- Calculer  $z_0$  solution de  $Pz_0 = r_0$
- $y_0 = z_0$

**Etape 2.** Etant donnés  $H_n, r_n, y_n$  :

- Calculer  $x_n$  solution de  $Ax_n = By_n$
- $\beta_n = (z_n, r_n)/(-\bar{B}x_n + Cy^n, z_n)$
- $H_{n+1} = H_n + \beta_n x_n$
- $r_{n+1} = r_n - \beta_n (-\bar{B}x_n + Cy^n)$
- Calculer  $z_{n+1}$  solution de  $Pz_{n+1} = r_{n+1}$
- $\gamma_n = (r_{n+1}, z_{n+1})/(r_n, z_n)$
- $y_{n+1} = z_{n+1} + \gamma_n y_n$ ,

où  $P$  est la matrice de préconditionnement défini, en s'inspirant du préconditionneur de Cahouet-Chabard [2], comme suit :

$$P = gD [G^{-1}\bar{M} + \mu\bar{I}^{-1}]^{-1}. \quad (7)$$

avec  $D$  comme définie précédemment (4),  $G$  étant obtenu par discrétisation de l'opérateur  $-\Delta$  avec des conditions aux limites mixtes :

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{z}_n &= w_n \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_s, \\ \bar{z}_n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$\bar{M}$  et  $\bar{I}$  sont deux pseudo-matrices "mass lumping" de  $M$  et  $I$  :

$$M(i, j) = \left( \frac{\mathbf{v}_i}{\Delta t}, \mathbf{v}_j \right) + \left( C_f \frac{|\mathbf{u}_h^n| \mathbf{v}_i}{H_h^n}, \mathbf{v}_j \right), I(i, j) = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j),$$

Pour  $w_n = D^{-1}r_n/g$ ,  $z_n$  est donné par :

$$z_n = \bar{M}\bar{z}_n + \bar{I}^{-1}w_n.$$

---

#### 4. Résultats numériques

La méthode proposée dans la section 2 a été testée sur des exemples numériques, en se basant sur des solutions analytiques artificielles ( voir [3], [4], [8]) : les résultats obtenus validaient les estimations d'erreur a priori annoncées dans (6). Ces cas ont validé l'approche sur des écoulements dans des conduites rectangulaires sans frontière libre latérale, autrement dit, c'est comme si on considérait le fluide entre deux murs verticaux à hauteur infinie. Pour le cas général d'une frontière latérale solide, on trouvera dans [5] et [8] des scénarii de simulation de crues sur des cas réels, toutefois sans calibrage faute de données réelles, ainsi qu'une étude comparative des résultats numériques obtenus avec ceux du code FESWMS [9], dans le

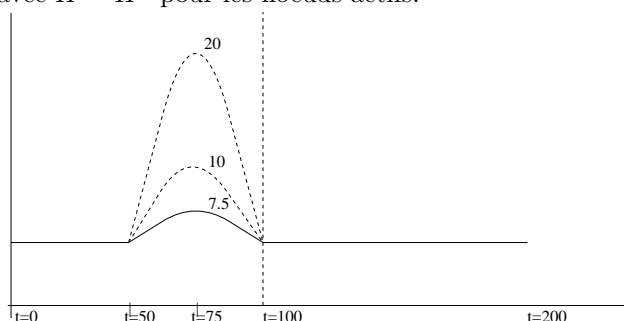
cas d'un écoulement subcritique dans une conduite trapézoïdale.

Dans cette section, on commence par décrire l'algorithme du module couvrant-découvrant des éléments utilisé dans notre code numérique pour le traitement de la frontière libre latérale. L'idée consiste à considérer un maillage fixe du domaine potentiellement mouillable et à chaque itération en temps, actualiser comme suit la logique des éléments et des noeuds du maillage mouillé participant au calcul :

**Etape 1.** L'élément était mouillé (ON) : Si la hauteur  $H < \varepsilon$  (fixé suivant le cas traité) pour un noeud donné de l'élément on le bascule OFF.

**Etape 2.** L'élément était sec (OFF) : Est-ce qu'il tourne ON ?

- Sur les noeuds mouillés de l'élément ( $H > 0$ ), la côte minimale de la surface libre  $Z_{min}$  est déterminée en fonction de  $H$  et de la côte  $Z_b$  du noeud en question.
- Sur les noeuds secs de l'élément, l'élévation maximale du fond  $Z_{bmax}$  est calculée.
- Si  $Z_{bmax} + \eta < Z_{min}$  ( $\eta$  une tolérance dépendant du cas traité), l'élément bascule ON et une hauteur  $H_i^* = Z_{min} - Z_{b_i}$  est attribuée au noeud  $i$ ,  $Z_{b_i}$  étant l'élévation du fond au noeud  $i$ .
- On remet la vitesse  $\mathbf{U} = 0$  et la hauteur  $H = 0$  pour les noeuds non actifs et  $\mathbf{U} = 0$  avec  $H = H^*$  pour les noeuds actifs.



**Figure 2.** Variation du débit

Ensuite, à titre d'illustration, on considère trois exemples de simulation d'écoulement subcritique. Pour ces 3 scénarii, la simulation s'effectue sur un temps  $t \in [0, 200s]$  et un débit à l'amont de  $5 \text{ m}^3/s$  pour  $t \in [0, 50s]$ ; on fait varier ensuite le débit pour  $t \in [50s, 100s]$ , de 5 à  $10 \text{ m}^3/s$  ou de 5 à  $20 \text{ m}^3/s$  dépendant du cas (voir figure 2). Pour  $t \in [100s, 200s]$ , on ramène le débit à  $5 \text{ m}^3/s$ .



#### 4.1. Cas d'une conduite rectangulaire avec obstacle

On considère une conduite rectangulaire de longueur  $100m$  et de largeur  $10m$ , présentant un obstacle cylindrique (un pilier), à une distance de  $30m$  de l'amont. Pour ce scénario, on fait varier le débit pour  $t \in [50s, 100s]$  de  $5$  à  $10 m^3/s$  (cas a) et de  $5$  à  $20 m^3/s$  (cas b)(voir figure 2). Le maillage élément fini correspondant à ce premier cas test est constitué de  $3647$  noeuds et  $6894$  éléments (voir figure 3).

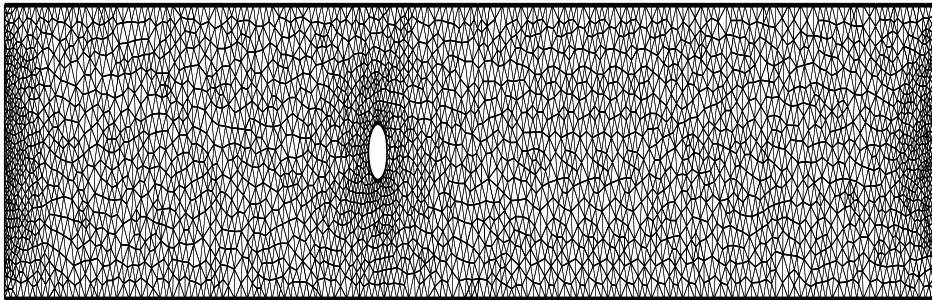


Figure 3. Maillage du domaine rectangulaire avec obstacle (vue déformée)

Ce cas vérifie la capacité du modèle à restituer de manière acceptable deux aspects :

- i) La circulation rotationnelle instationnaire (allée de Karman) en aval de l'obstacle comme l'illustre le zoom sur la figure (11) dans le "cas a" et les figures (6) dans les cas "a" et "b".

- ii) l'effet de remou et de retour d'onde en présence d'un obstacle fixe dans le cours d'un écoulement à débit variable similaire à une crue : les figures (7) illustrent la variation de la hauteur, en particulier à l'aval de l'obstacle.

On présente sur les figures 6 respectivement les figures 7 aux temps ( $t = 50s, 75s, 95s, 120s, 160s, 200s$ ) les iso-valeurs du module de la vitesse respectivement de la hauteur pour les deux cas "a" et "b". Pour la vitesse, la comparaison montre clairement que le cas "b" est à la limite du subcritique; en effet, le nombre de Froud avoisine la valeur de  $0.98$  en aval de l'écoulement pour  $t \in [90s, 100s]$ . Pour la hauteur, et pour les 2 cas on observe une augmentation de l'élévation de l'eau comme attendu, en amont de l'obstacle qui s'estompent avec la décrue à partir de  $t = 100s$ ; cette décrue est d'autant plus importante pour le cas "b" entre le temps  $t \in [100s, 160s]$ . Au delà de  $t = 160s$ , l'écoulement retrouve un régime plus régulier.

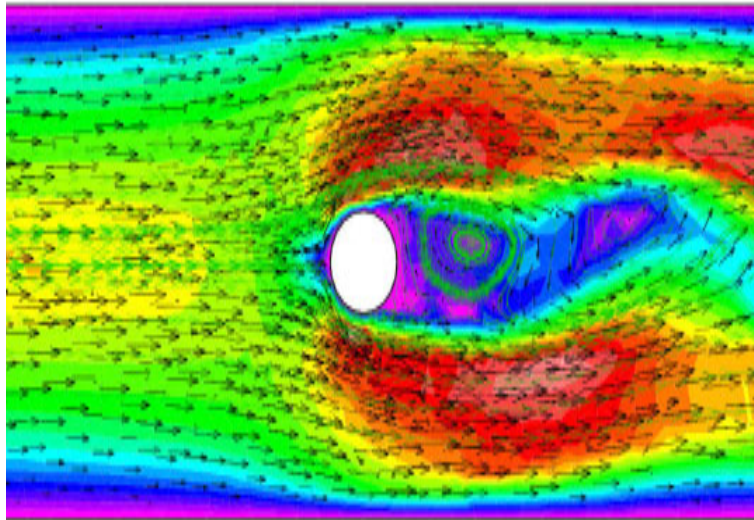


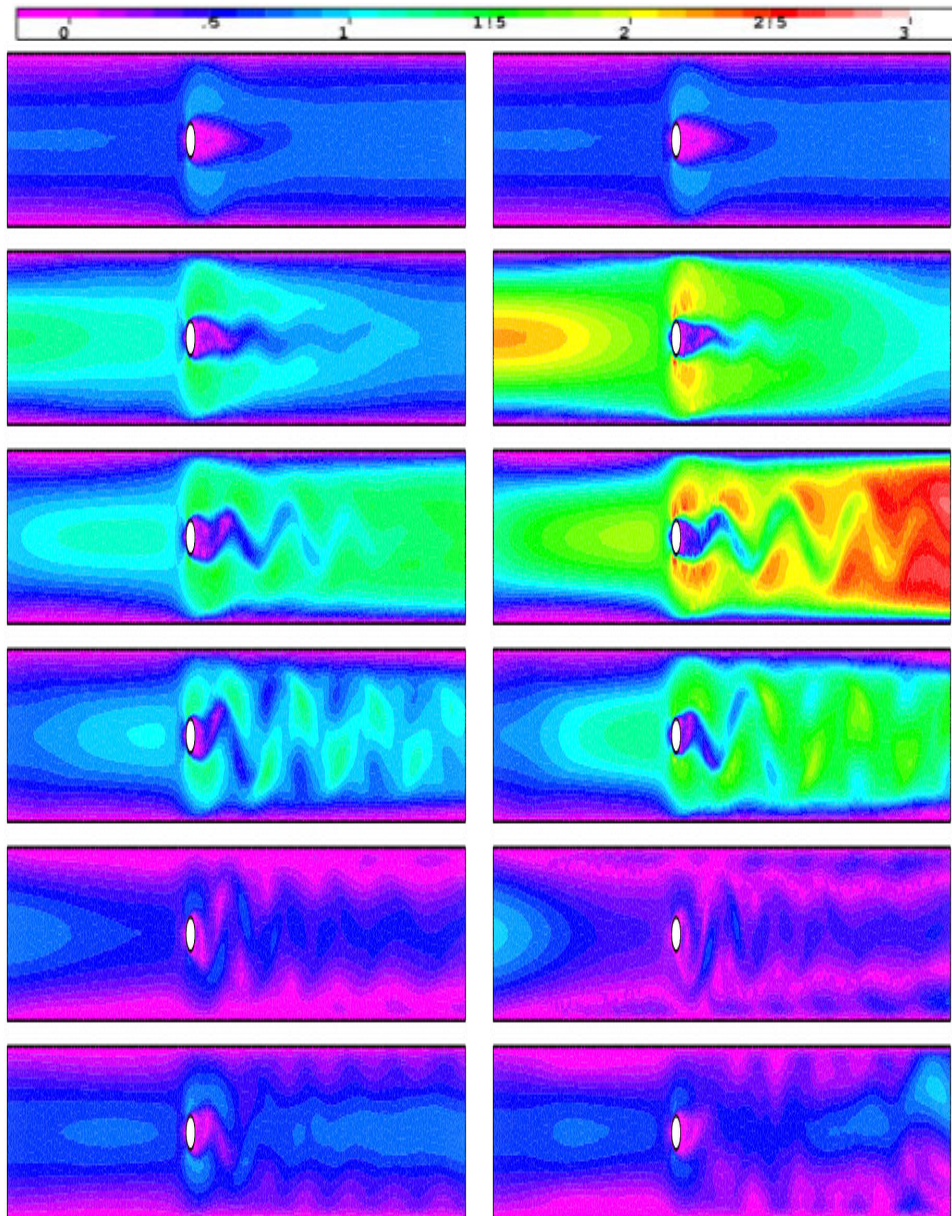
Figure 4. Zoom autour de l'obstacle :  $t=95$  cas a : débit  $[5-10] m^3/s$

#### 4.2. Cas d'une conduite de type convergent-divergent

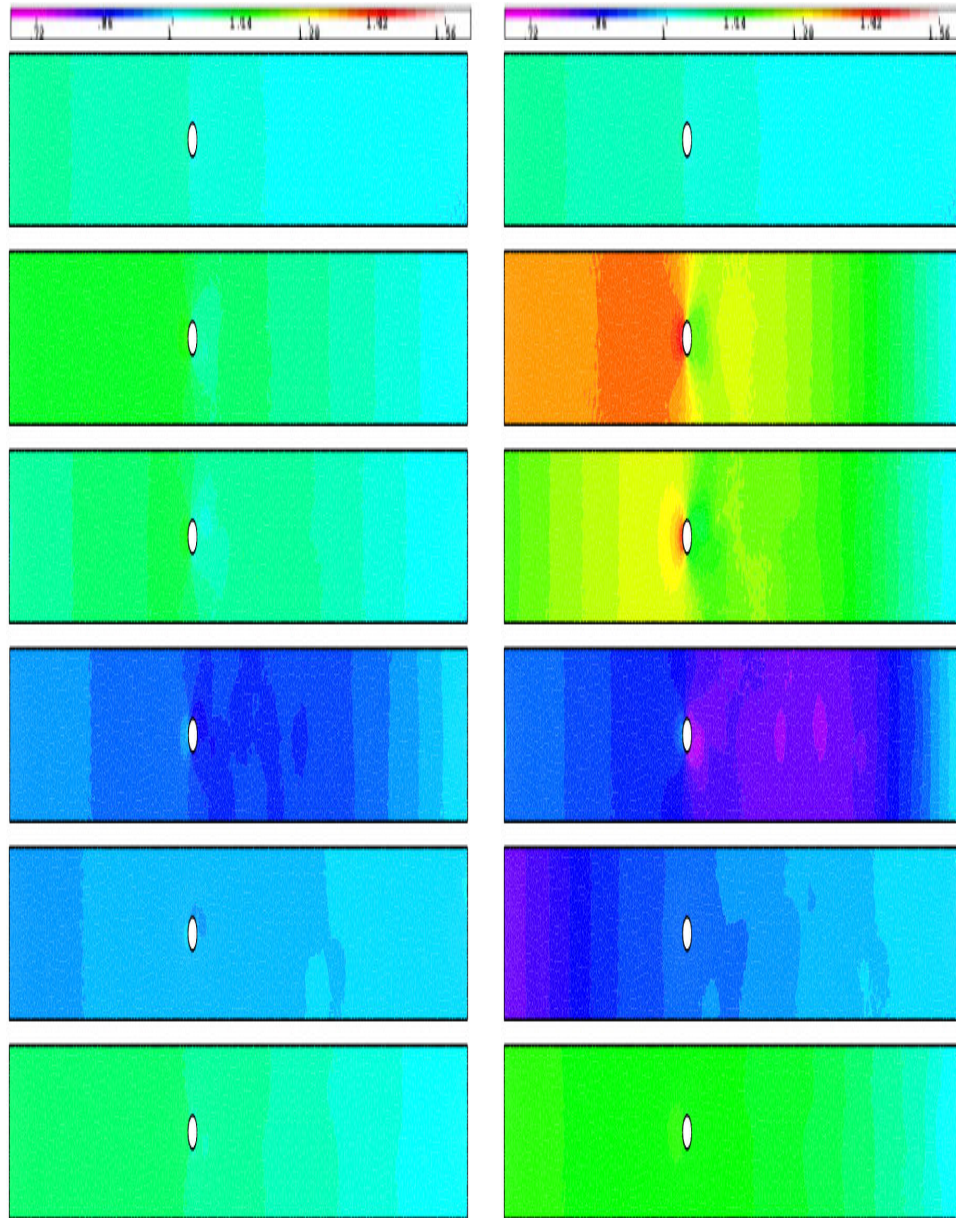
Dans ce cas on considère un écoulement subcritique dans une conduite de type convergent-divergent (voir figure 5), constituée d'une partie rectangle (100m de longueur et 10m de largeur) et d'une partie trapèze (base inférieure de 10m, base supérieure de 40m et hauteur de 50m). Le maillage élément fini correspondant à ce cas test est constitué de 14833 noeuds et 29184 éléments. Pour ce scénario, on fait varier le débit pour  $t \in [50s, 100s]$  de 5 à  $10 m^3/s$ . Pour ce cas raide, afin d'établir un écoulement stabilisé correspondant à un débit constant de  $5m^3/s$ , il a fallu tourner le solveur pendant un temps "négatif" de 300s; la solution ainsi obtenue a servi de conditions initiales pour cette simulation pour  $t \in [0, 200s]$ .



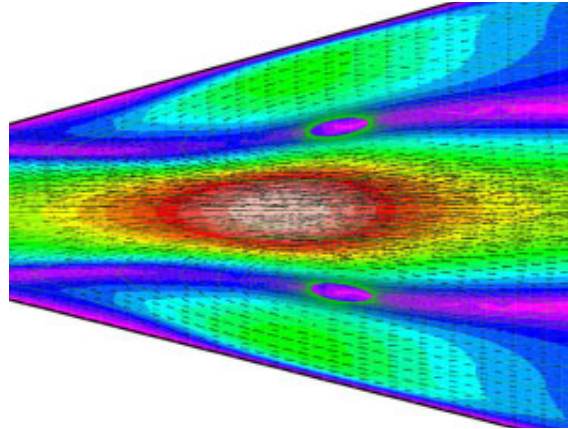
Figure 5. Maillage de la conduite convergent-divergent, 14833 noeuds, 29184 éléments



**Figure 6.** Iso vitesse :  $t = 50s, 75s, 95s, 120s, 160s, 200s$  ; débit : cas "a"  $[5-10] m^3/s$  (gauche), cas "b"  $[5-20] m^3/s$  (droite)



**Figure 7.** Iso hauteur :  $t = 50s, 75s, 95s, 120s, 160s, 200s$  ; débit : cas "a"  $[5-10] m^3/s$  (gauche), cas "b"  $[5-20] m^3/s$  (droite)

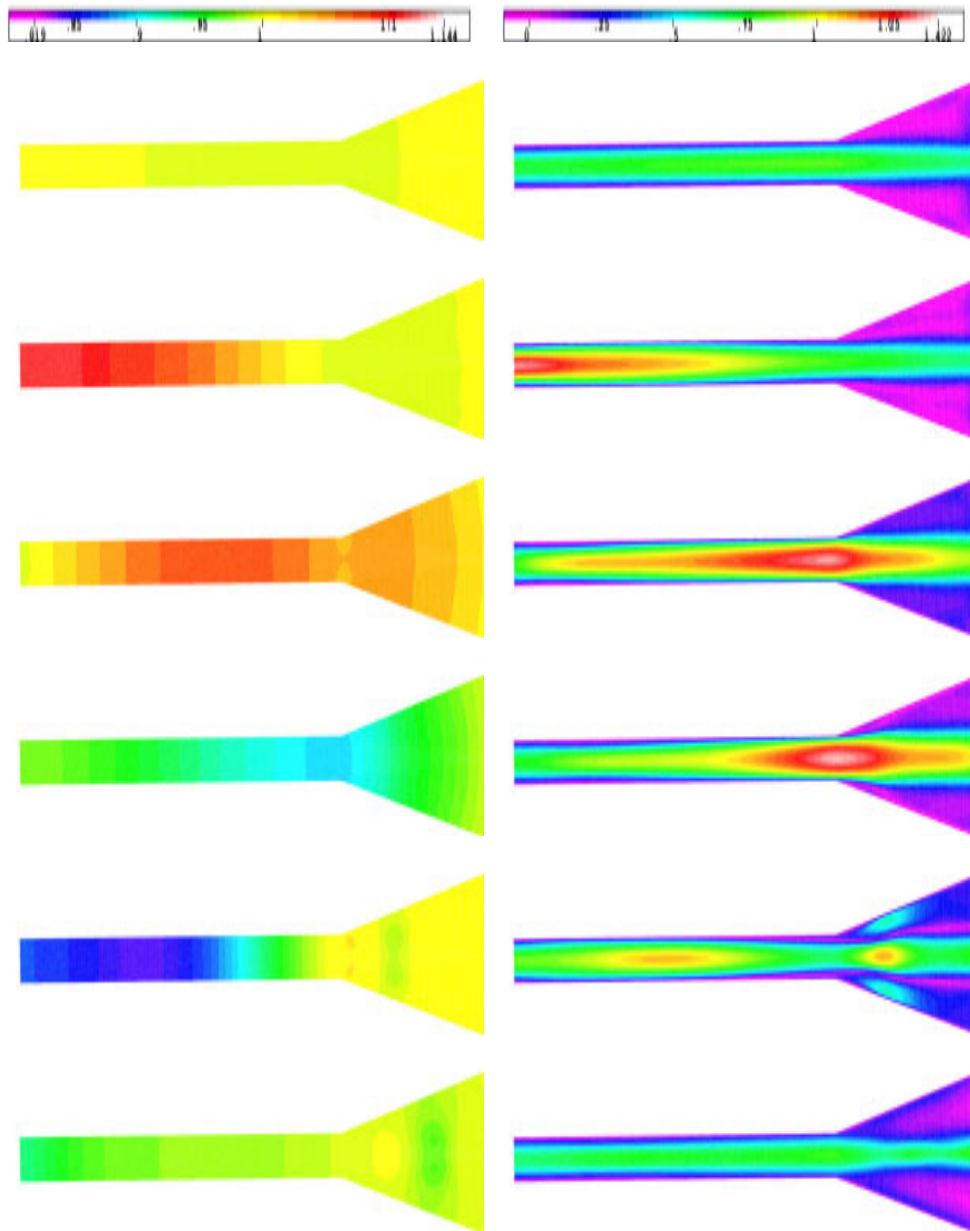


**Figure 8.** Zoom sur la zone de circulation de l'eau à 17.15m de l'entrée divergent;  $t = 150s$

Au vu des résultats, on remarque tout d'abord (Figure 8) que les fortes circulations rotationnelles provoquées par la présence du divergent dans la zone aval du convergent sont bien reproduites par le modèle. En fait, dans cette zone d'embouchure, schématisant une plaine inondable, la compression est au plus fort entre  $t = 100s$  et  $150s$ , correspondant au début de la décrue à la frontière amont et à l'arrivée de l'effet de la crue dans le divergent. L'augmentation importante de cette compression et de la vitesse induite s'explique aussi par la hauteur imposée à la frontière de sortie et dont la décroissance ne s'amorce qu'après une résorption de l'effet de la crue après  $t = 180s$ . Les figures 9, où sont présentées respectivement aux temps ( $t = 50, 75, 100, 120, 150, 180s$ ) les iso-valeurs du module de la vitesse et de la hauteur d'eau, montrent bien cette évolution de la crue. De plus on observe aussi l'apparition de deux zones de décollements symétriques (voir les lignes de courant sur la figure 8) où la recirculation du fluide accentue la compression en générant un effet d'aspiration illustré par la diminution de la hauteur à  $t = 120s$  (zone du convergent-divergent avec la vitesse à son maximum) et à  $t = 150s$  (zone amont du convergent avec une vitesse décroissante mais relativement importante).

### 4.3. Cas d'un canal à section trapézoïdal

Pour ce cas le domaine fluide est un canal prismatique de longueur 100m, avec une section trapézoïdale de hauteur 5m, de largeur 20m pour la base supérieure et 14m pour la base inférieure. Pour ce scénario, on fait varier le débit pour  $t \in [50s, 100s]$  de 5 à  $20 m^3/s$  (figure 2). Le maillage élément fini correspondant (Figure 10) est constitué de 5292 noeuds et 10256 éléments. Dans ce cas, le phénomène de frontière libre couvrant-découvrant est testé via le module décrit au début de la section. Pour ce cas, on a laissé la simulation évoluer jusqu'à  $t = 300s$ .



**Figure 9.** Iso hauteur (à gauche) et vitesse :  $t = 50s, 75s, 100s, 120s, 150s, 180s$  ; débit  $[5-10] m^3/s$

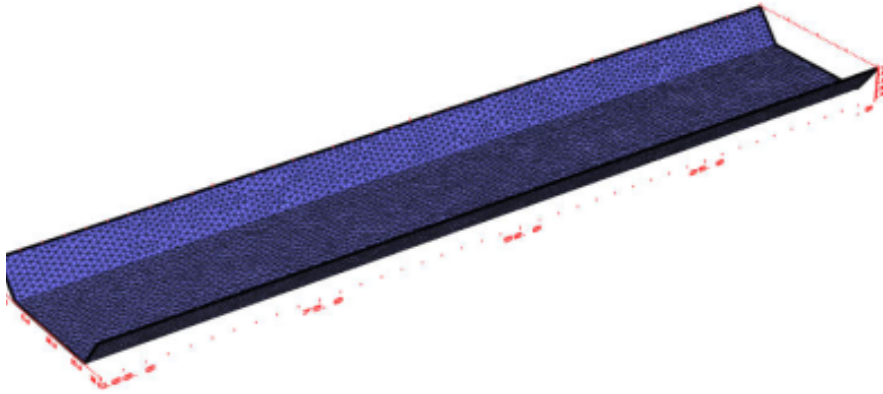


Figure 10. Maillage du canal prismatique à section trapézoïdale

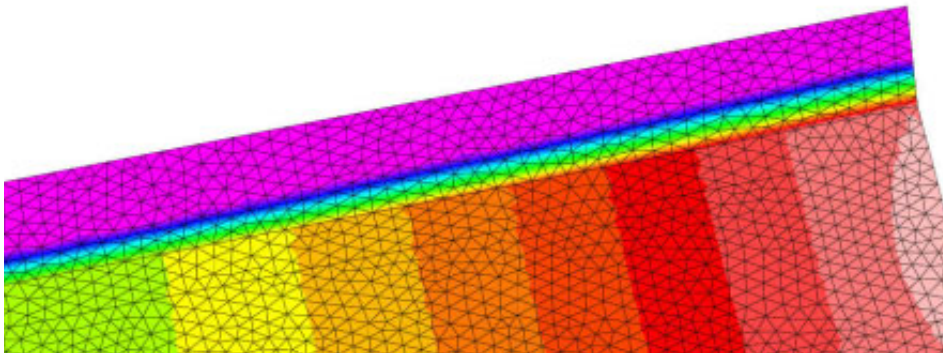
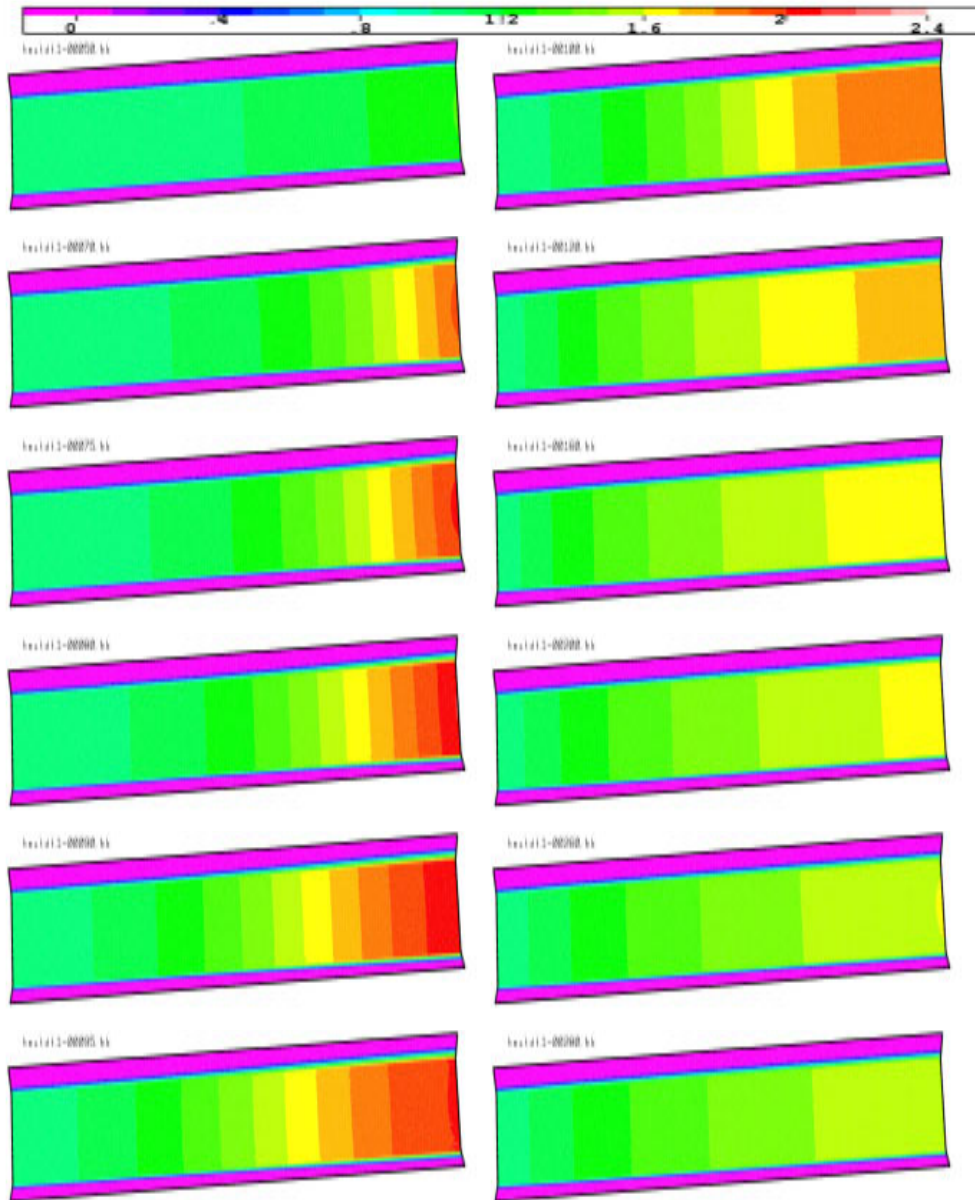


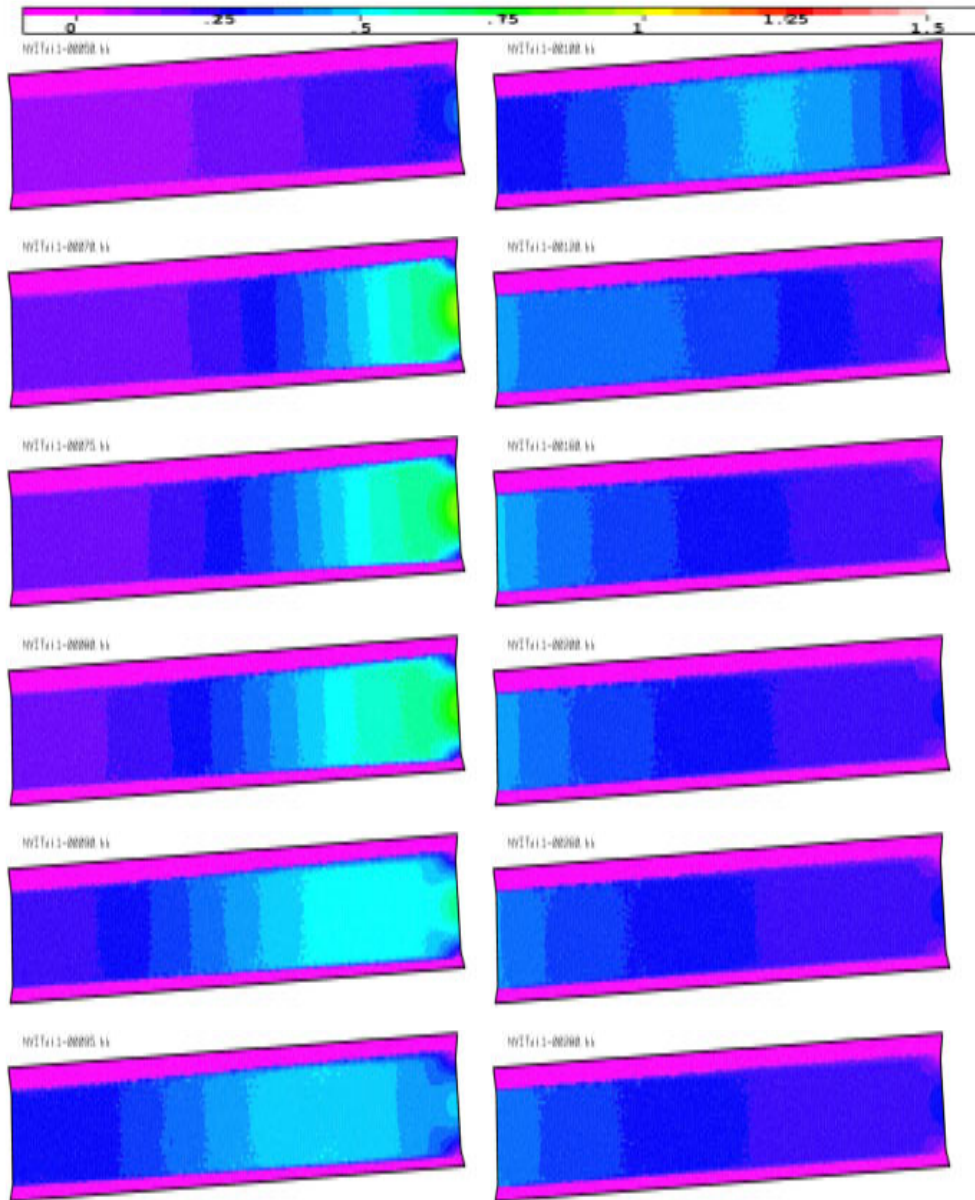
Figure 11. Zoom des iso-hauteurs sur le bord latéral :  $t=95s$ ; débit  $[5-20] m^3/s$

La figure 11, présentant un zoom des isovaleurs de la hauteur sur le maillage, montre bien la faisabilité de l'algorithme couvrant-découvrant. Ensuite, Sur les figures 12 respectivement 13, on trace les iso-valeurs de la hauteur respectivement de la vitesse aux temps ( $t = 50s, 70s, 75s, 80s, 90s, 95s, 100s, 120s, 160s, 200s, 260s, 280s$ ). On constate que la vitesse maximale de l'eau est moins importante dans ce cas test, en comparaison avec les résultats précédents, et ce malgré le débit important. Ceci est justifié par la géométrie du domaine fluide, ayant une plus grande largeur permettant à l'eau de s'étaler et par conséquent de ralentir. Une autre conséquence concerne le retard dans le rétablissement du régime initial correspondant à un débit  $5 m^3/s$  : en effet, on remarque que la hauteur sur la partie amont décroît certes, mais lentement ; ceci est dû à la lente dissipation de la décrue créant un effet bouchon. Pour d'autres résultats et des comparaisons avec FESWMS, sur ce type de conduite avec ou sans pente, on peut consulter [8].



**Figure 12.** Iso hauteur :  $t = 50s, 70s, 75s, 80s, 90s, 95s, 100s, 120s, 160s, 200s, 260s, 280s$  ; débit :  $[5-20] m^3/s$





**Figure 13.** Iso vitesse :  $t = 50s, 70s, 75s, 80s, 90s, 95s, 100s, 120s, 160s, 200s, 260s, 280s$  ; débit :  $[5-20] m^3/s$

---

## 5. Conclusion et perspectives

L'ensemble des tests effectués dans ce travail montrent la cohérence des résultats numériques obtenus ainsi que la consistance de l'algorithme du couvrant-découvrant proposé. Le profil de vitesse à l'entrée, supposé parabolique, est calculé par explicitation de la hauteur dans l'équation du débit. Une telle considération ne tient pas désormais de l'effet des bords du domaine trapézoïdale et reste réaliste seulement dans le cas de conduites rectangulaires. Une autre approche basée sur la partition du débit, utilisant la méthode de débitance (FESWMS [9]), et un critère de mouillage et séchage des éléments intervenant dans le taux de remplissage des éléments, est en cours d'implémentation.

---

## 6. Bibliographie

- [1] AGOSHKOV V.I., QUARTERONI A., SALERI F., Recent developments in the numerical simulation of shallow water equations. I- Boundary conditions , *Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, 80/P*, October 1992.
- [2] CAHOUE, CHABART, Some fast 3-d finite element solvers for generalized Stokes problem , *Rapport EDF HE/41/87-03* 1987.
- [3] EL DABAGHI F., EL KACIMI A., NAKHLE B., Numerical analysis of Saint-Venant equations using a mixed P1/P1 finite element approximation with Characteristics method , *Rapport de recherche INRIA, <http://www.inria.fr/rrrt/>*.
- [4] EL DABAGHI F., EL KACIMI A., NAKHLE B., Characteristics time discretization and mixed finite element approximation for shallow water equations : a priori error estimates , *To appear in International Journal of Scientific Computing*
- [5] EL DABAGHI F., EL KACIMI A., GUELMY N., HENINE H., B. Nakhle, KADA KLOUCHA C., TAIK A., Numerical models for hydrology and hydraulics, HPCN implementation aspects for flood propagation , *Rapport de contrat WADI D4.2 : Flood forecasting and Flood wave propagation modeling, DGXII-Commission Européenne*, Aug. 15, 2004.
- [6] GALLAND J.C., GOUTAL N., HERVOUET J.M., TELEMAC : A new numerical model for solving shallow water equations. Adv. Water ressourcesguilf, *Adv. Water resources*, vol. 14, n° 3, 1974.
- [7] LUETTICH R.A., WESTERINK J.J., N.W. SCHEFFNER, ADCIRC : An advanced three dimensional circulation model for shelves, coasts, and estuaries , *Technical report 1, Department of the army, U.S. Army corps of Engineers, Washington, D.C.20314-1000*.
- [8] NAKHLE B., Modélisation Numérique des Ondes de Crue ou de Submersion , *Thèse de l'Université de Pau et l'Adour-France et de l'Université St-Joseph-Liban*, 2005.
- [9] FESWMS-2DH : Finite Element Surface Water Modelling System - Two Dimensional Flow in Horizontal Plane , *U.S. Departement of transportation, Users Manuel-vesion 2, Virginia, 1991*