TAMTAM'09

Modélisation asymptotique d'une coque peu-profonde de Marguerre-von Kármán généralisée dans le cas dynamique

D.A. Chacha* — A. Ghezal** — A. Bensayah***

* Département de Maths-infor, Université Kasdi Merbah,
B.P 511 Ouargla 30000, Algérie
d_chacha@hotmail.com

** Département de Maths-infor, Université Kasdi Merbah,
B.P 511 Ouargla 30000, Algérie
ghezalark@hotmail.fr

*** Département de Maths-infor, Université Kasdi Merbah,
B.P 511 Ouargla 30000, Algérie
bensayahabd@gmail.com

RÉSUMÉ. Dans un travail récent Gratie [7] a généralisé les équations de Marguerre-von Kármán classiques étudiées par Ciarlet et Paumier dans [2], où une partie seulement de la face latérale est soumise à des conditions aux limites de type von Kármán et la partie restante étant libre. Elle montre que le terme dominant du développement asymptotique est caractérisé par un problème aux limites bi-dimensionnel. Dans ce travail, on étend formellement cette étude au cas dynamique.

ABSTRACT. In a recent work Gratie [7] has generalized the classical Marguerre-von Kármán equations studied by Ciarlet and Paumier in [2], where only a portion of the lateral face is subjected to boundary conditions of von Kármán's type and the remaining portion being free. She shows that the leading term of the asymptotic expansion is characterized by a two-dimensional boundary value problem. In this paper, we extend formally this study to dynamic case.

MOTS-CLÉS : élasticité non linéaire, analyse asymptotique, coque peu-profonde, Marguerre-von Kármán, dynamique.

KEYWORDS : nonlinear elasticity, asymptotic analysis, shallow shell, Marguerre-von Kármán, dynamic.

Reçu le 28/09/2009,
révisé le 03/05/2010,
accepté le 05/09/2010

1. Introduction

Les équations classiques de Marguerre-von Kármán, qui constituent un modèle mathématique de l'équilibre d'une coque peu-profonde sous l'action des forces de pression horizontales, ont été proposées par Marguerre [16], et par von Kármán et Tsien [17]. En 1986 Ciarlet et Paumier [2] ont donné une justification mathématique à ces équations par l'analyse asymptotique. Ces équations en coordonnées curvilignes ont été justifiées par Andreoiu-Banica [5]. En 2002 Gratie [7] a généralisé ces équations, où une partie seulement de la face latérale est soumise à des conditions aux limites de type von Kármán et la partie restante étant libre, ensuite Ciarlet et Gratie [9, 8] ont établi un théorème d'existence pour ces équations, pour les deux modèles plaques de von Kármán généralisées et coques peu-profondes de Marguerre-von Kármán généralisées.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire et dans le cas dynamique, une justification par l'analyse asymptotique des équations des coques minces (membranaire, en flexion et de Koiter) a été proposé par Xiao [11, 12, 13], pour les coques membranaires généralisées par Ye [14] et pour les coques peu-profondes d'épaisseur variable par Yan [15].

Ce travail rentre dans le cadre de la modélisation asymptotique des structures minces, il généralise ainsi les travaux [7, 8] au cas dynamique et les travaux [11, 12, 14] au cas non linéaire mais avec des conditions au bord latéral de type von Kármán généralisées.

2. Le problème tri-dimensionnel

Dans toute la suite de ce travail, on utilise les conventions et notations suivantes : les indices Latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ tandis que les indices Grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$. La convention de la sommation par rapport aux indices répétés est systématiquement utilisée. On note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$, $\hat{\partial}_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i^\varepsilon}$ et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

On se donne un ouvert borné connexe ω du plan horizontal $\mathbb{R}^2$, localement d'un même côté de sa frontière γ, supposée Lipschitzienne et on suppose que $0 \in \gamma$ et on note par $\gamma\,(y)$ l'arc de γ qui joint 0 et le point $y \in \gamma$. Soit γ_1 et γ_2 deux parties disjointes de γ et relativement ouvertes dans ω, telles que $lgr\gamma_1 > 0$, $lgr\gamma_2 > 0$ et $lgr(\gamma - \{\gamma_1 \cup \gamma_2\}) = 0$. On note (ν_α) le vecteur unitaire normal extérieur le long de γ et (τ_α) le vecteur unitaire tangent à γ défini par $\tau_1 = -\nu_2$ et $\tau_2 = \nu_1$, on note $\partial_\nu = \nu_\alpha \partial_\alpha$ la dérivée normale extérieure, $\partial_\tau = \tau_\alpha \partial_\alpha$ la dérivée tangentielle dans la direction du vecteur (τ_α) le long de γ. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\Omega^\varepsilon = \omega \times] - \varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$.

Soit $\theta^\varepsilon \in C^3(\bar{\omega})$ une fonction donnée qui satisfait $\theta^\varepsilon = \partial_\nu \theta^\varepsilon = 0$ sur γ_1, la fonction θ^ε doit être d'ordre ε pour que la coque soit faiblement courbée (voir [2]). On définit l'application $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ par $\Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = (x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)) + x_3^\varepsilon a_3^\varepsilon(x_1, x_2)$, a_3^ε le vecteur normal unitaire à la surface moyenne définie par $\Theta^\varepsilon(\bar{\omega} \times \{0\})$. On note $\hat{\Omega}^\varepsilon =$

$\Theta^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$, $\hat{\gamma}_1^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\gamma_1)$ et $\hat{\Gamma}_\pm^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_\pm^\varepsilon)$. Pour ε suffisamment petit, $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \Theta^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ est un C^1-difféomorphisme (voir [2, Proposition 3.2]).

On considère alors une coque peu-profonde non linéairement élastique dans le cas dynamique, de configuration de référence $\{\hat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, formée d'un matériau de Saint-Venant Kirchhoff de constantes de Lamé $\lambda^\varepsilon > 0$ et $\mu^\varepsilon > 0$, soumise à des forces de volume de densité $(\hat{f}_i^\varepsilon) = (0, 0, \hat{f}_3^\varepsilon)$ en son intérieur $\hat{\Omega}^\varepsilon$, à des forces de surface de densité $(\hat{g}_i^\varepsilon) = (0, 0, \hat{g}_3^\varepsilon)$ sur sa face supérieure $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon$ et sa face inférieure $\hat{\Gamma}_-^\varepsilon$ et à des forces de pression horizontales $(\hat{h}_1^\varepsilon, \hat{h}_2^\varepsilon, 0)$ de type von Kármán au sens de [1] sur la partie $\Theta^\varepsilon\left(\gamma_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right)$ de sa face latérale. Sur la partie restante $\Theta^\varepsilon\left(\gamma_2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right)$ de sa face latérale, la coque est soumise à des conditions aux limites de bord libre ; $(\hat{n}_i^\varepsilon)$ est la normale extérieure unitaire le long de $\partial\hat{\Omega}^\varepsilon$, $\hat{\rho}^\varepsilon$ est la densité de masse, $\hat{p}^\varepsilon$ et $\hat{q}^\varepsilon$ sont des données, $\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \hat{E}_{pp}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu^\varepsilon \hat{E}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon)$ les composantes du tenseur des contraintes et $\hat{E}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_i^\varepsilon \hat{u}_j^\varepsilon + \hat{\partial}_j^\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon + \hat{\partial}_i^\varepsilon \hat{u}_m^\varepsilon \hat{\partial}_j^\varepsilon \hat{u}_m^\varepsilon)$ les composantes du tenseur des déformations.

Enfin on définit les espaces suivants :

$$V(\hat{\Omega}^\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{c} \hat{v}^\varepsilon = (\hat{v}_i^\varepsilon) \in \boldsymbol{W}^{1,4}(\hat{\Omega}^\varepsilon); \hat{v}_\alpha^\varepsilon \text{ indépendantes de } \hat{x}_3^\varepsilon \text{ et } \hat{v}_3^\varepsilon = 0 \\ \text{sur } \Theta^\varepsilon(\gamma_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \end{array} \right\},$$

$$V(\Omega^\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{c} v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \boldsymbol{W}^{1,4}(\Omega^\varepsilon); v_\alpha^\varepsilon \text{ indépendantes de } x_3^\varepsilon \text{ et } v_3^\varepsilon = 0 \\ \text{sur } \gamma_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon] \end{array} \right\},$$

$$V(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) \in \boldsymbol{W}^{1,4}(\Omega); v_\alpha \text{ indépendantes de } x_3 \text{ et } v_3 = 0 \\ \text{sur } \gamma_1 \times [-1, 1] \end{array} \right\},$$

$$V_{KL}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega); v_\alpha \text{ indépendantes de } x_3 \text{ et } v_3 = 0 \\ \text{sur } \gamma_1 \times [-1, 1], \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right\},$$

$$V(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_3 = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_1\},$$

$$\boldsymbol{L}_s^2(\Omega^\varepsilon) = \{\tau^\varepsilon = (\tau_{ij}^\varepsilon) \in \boldsymbol{L}^2(\Omega^\varepsilon); \tau_{ij}^\varepsilon = \tau_{ji}^\varepsilon\}.$$

Le déplacement inconnu $\hat{u}^\varepsilon = (\hat{u}_i^\varepsilon)(\hat{x}^\varepsilon, t)$ est solution du problème aux limites suivant :

$$(\hat{P}^\varepsilon.C) \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} - \hat{\partial}_j^\varepsilon \left(\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon + \hat{\sigma}_{kj}^\varepsilon \hat{\partial}_k^\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon \right) = \hat{f}_i^\varepsilon \text{ dans } \hat{\Omega}^\varepsilon \times]0, +\infty[\,, \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_\alpha^\varepsilon \text{ indépendantes de } \hat{x}_3^\varepsilon \text{ et } \hat{u}_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Theta^\varepsilon\left(\gamma_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right) \times]0, +\infty[\\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{(\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon + \hat{\sigma}_{k\beta}^\varepsilon \hat{\partial}_k^\varepsilon \hat{u}_\alpha^\varepsilon) \circ \Theta^\varepsilon\} \nu_\beta dx_3^\varepsilon = \hat{h}_\alpha^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon \text{ sur } \gamma_1 \times]0, +\infty[\end{array} \right. , \\ (\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon + \hat{\sigma}_{kj}^\varepsilon \hat{\partial}_k^\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon) \hat{n}_j^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon = 0 \text{ sur } (\gamma_2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \times]0, +\infty[\,, \\ (\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon + \hat{\sigma}_{kj}^\varepsilon \hat{\partial}_k^\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon) \hat{n}_j^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon = \hat{g}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon \text{ sur } \left(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \right) \times]0, +\infty[\,, \\ \hat{u}^\varepsilon\left(\hat{x}^\varepsilon, 0\right) = \hat{p}^\varepsilon \text{ et } \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}\left(\hat{x}^\varepsilon, 0\right) = \hat{q}^\varepsilon \text{ dans } \hat{\Omega}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle du problème $(\hat{P}^\varepsilon.C)$ est :

$$(\hat{P}^\varepsilon.V) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u}^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon, t) \in V(\hat{\Omega}^\varepsilon)\ \forall t \geq 0, \text{ tel que,} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \hat{\rho}^\varepsilon \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{u}_i^\varepsilon \hat{v}_i^\varepsilon d\hat{x}^\varepsilon \right\} + \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} (\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon + \hat{\sigma}_{kj}^\varepsilon \hat{\partial}_k^\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon) \hat{\partial}_j^\varepsilon \hat{v}_i^\varepsilon d\hat{x}^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{f}_3^\varepsilon \hat{v}_3^\varepsilon d\hat{x}^\varepsilon \\ + \int_{\hat{\Gamma}_+^\varepsilon \cup \hat{\Gamma}_-^\varepsilon} \hat{g}_3^\varepsilon \hat{v}_3^\varepsilon d\hat{\Gamma}^\varepsilon + \int_{\hat{\gamma}_1^\varepsilon} \{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\hat{v}_\alpha^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon\right) dx_3^\varepsilon \} \hat{h}_\alpha^\varepsilon d\hat{\gamma}^\varepsilon, \\ \forall \hat{v}^\varepsilon \in V(\hat{\Omega}^\varepsilon), \forall t > 0, \\ \hat{u}^\varepsilon\left(\hat{x}^\varepsilon, 0\right) = \hat{p}^\varepsilon \text{ et } \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}\left(\hat{x}^\varepsilon, 0\right) = \hat{q}^\varepsilon \text{ dans } \hat{\Omega}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Proposition 1 *Si Θ^ε est un C^1-difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors le problème $(\hat{P}^\varepsilon.V)$ est équivaut à :*

$$(P^\varepsilon)\begin{cases} \textit{Trouver } (u_i^\varepsilon = \hat{u}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon) \in V(\Omega^\varepsilon)\ \forall t \geq 0, \textit{ tel que}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} u_i^\varepsilon v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon\right\} + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon b_{kj}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon \\ + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon b_{ki}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon u_l^\varepsilon b_{mj}^\varepsilon \partial_m^\varepsilon v_l^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_3^\varepsilon v_3^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_3^\varepsilon v_3^\varepsilon \delta^\varepsilon \beta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon \\ + \int_{\gamma_1} h_\alpha^\varepsilon \{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon\} d\gamma, \forall v^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon), \forall t > 0, \\ u^\varepsilon(x^\varepsilon, 0) = p^\varepsilon \textit{ et } \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x^\varepsilon, 0) = q^\varepsilon \textit{ dans } \Omega^\varepsilon, \end{cases}$$

où :
$f_i^\varepsilon = \hat{f}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon$, $g_i^\varepsilon = \hat{g}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon$, $h_\alpha^\varepsilon = \hat{h}_\alpha^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon$, $\nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = (\partial_j^\varepsilon \Theta_i^\varepsilon(x^\varepsilon))$,
$\delta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \det \nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)$, $b_{ij}^\varepsilon(x^\varepsilon) = (\{\nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)\}^{-1})_{ij}\ \forall x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$,
$\beta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \{b_{3i}(x^\varepsilon) b_{3i}(x^\varepsilon)\}^{\frac{1}{2}}\ \forall x^\varepsilon \in (\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon)$.

Preuve.

Dans le problème $(\hat{P}^\varepsilon.V)$, en utilisant les relations suivantes :
$\hat{\partial}_j^\varepsilon \hat{v}_i^\varepsilon = b_{kj}^\varepsilon(x^\varepsilon)\partial_k^\varepsilon v_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$, $d\hat{x}^\varepsilon = \delta^\varepsilon dx^\varepsilon$, $d\hat{\Gamma}^\varepsilon = \delta^\varepsilon \beta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$, on obtient le problème (P^ε). ■

3. Application de la méthode des développements asymptotiques formels

On commence par une mise à l'échelle du problème tri-dimensionnel, il s'agit de formuler le problème (P^ε) sur un ouvert Ω, indépendant de ε. Pour cela, on pose $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, $\Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}$, et à chaque point $x \in \bar{\Omega}$, on fait correspondre un point $x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ par la bijection $\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \to x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$.
On associe aux fonctions u^ε, $v^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon)$ et $\sigma^\varepsilon \in \boldsymbol{L}_s^2(\Omega^\varepsilon)$ les fonctions mises à l'échelle $u(\varepsilon)$, v et $\sigma(\varepsilon)$ définies par :

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon)(x, t), u_3^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x, t), \\ v_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\alpha(x), v_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon v_3(x), \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x, t), \\ \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^3 \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)(x, t), \sigma_{33}^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^4 \sigma_{33}(\varepsilon)(x, t), \end{cases}$$

pour tout $x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \bar{\Omega}^\varepsilon$. On fait des hypothèses essentielles sur les données :
il existe des constantes $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$ et des fonctions $f_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $g_3 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$, $h_\alpha \in L^2(0, T; L^2(\gamma_1))$ (T fini), $\theta \in C^3(\bar{\omega})$ indépendantes de ε et $p(\varepsilon) \in V(\Omega)$, $q(\varepsilon) \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} \lambda^\varepsilon = \lambda, \mu^\varepsilon = \mu, \rho^\varepsilon = \varepsilon^2 \rho, \theta^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon \theta(x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in \bar{\omega}, \\ f_3^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^3 f_3(x, t), \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon, \\ g_3^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^4 g_3(x, t), \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \\ h_\alpha^\varepsilon(y_1, y_2, t) = \varepsilon^2 h_\alpha(y_1, y_2, t), \forall (y_1, y_2) \in \gamma_1, \\ p_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 p_\alpha(\varepsilon)(x), p_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon p_3(\varepsilon)(x), \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon, \\ q_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 q_\alpha(\varepsilon)(x), q_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon q_3(\varepsilon)(x), \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

On obtient alors un problème $(P(\varepsilon))$ associé, posé sur l'ouvert Ω.

Théorème 1 *On suppose que f_3^ε, g_3^ε, h_α^ε et θ^ε vérifient les hypothèses précédentes, alors le problème (P^ε) est équivaut à :*

$$(P(\varepsilon))\begin{cases} \textit{Trouver } u(\varepsilon)(x,t) \in V(\Omega)\ \forall t \in [0,T], \textit{tel que,} \\ A^t\left(u\left(\varepsilon\right),v\right) + B^\theta\left(\sigma\left(\varepsilon\right),v\right) + 2C^\theta\left(\sigma\left(\varepsilon\right),u\left(\varepsilon\right),v\right) = F\left(v\right) \\ +\varepsilon^2 R\left(\varepsilon;\sigma\left(\varepsilon\right),u\left(\varepsilon\right),v\right), \forall v \in V(\Omega), \forall t \in]0,T[, \\ u\left(\varepsilon\right)\left(x,0\right) = p\left(\varepsilon\right) \textit{ et } \frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial t}\left(x,0\right) = q\left(\varepsilon\right) \textit{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où :
$A^t\left(u\left(\varepsilon\right),v\right) = -\frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho\int_\Omega u_3\left(\varepsilon\right)v_3 dx\right\}$, $B^\theta\left(\sigma\left(\varepsilon\right),v\right) = -\int_\Omega \sigma_{ij}\left(\varepsilon\right)\gamma_{ij}^\theta(v)dx$,
$C^\theta\left(\sigma\left(\varepsilon\right),u\left(\varepsilon\right),v\right) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}\left(\varepsilon\right)\partial_i^\theta u_3\left(\varepsilon\right)\partial_j^\theta v_3 dx$,
$F\left(v\right) = -\int_\Omega f_3 v_3 dx - \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma - \int_{\gamma_1} h_\alpha\{\int_{-1}^1 v_\alpha dx_3\}d\gamma$,
$\partial_\alpha^\theta v = \partial_\alpha v - \partial_\alpha\theta\partial_3 v$, $\partial_3^\theta v = \partial_3 v$, $\gamma_{ij}^\theta(v) = \frac{1}{2}\left(\partial_i^\theta v_j + \partial_j^\theta v_i\right)$.

Preuve.
La démonstration est similaire à celle du théorème 3.1 dans [2],
on a :

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon b_{kj}^\varepsilon\partial_k^\varepsilon v_i^\varepsilon\delta^\varepsilon dx^\varepsilon = \varepsilon^5\int_\Omega \sigma_{ij}\left(\varepsilon\right)\gamma_{ij}^\theta\left(v\right)dx + \varepsilon^7\varrho_B\left(\varepsilon;\sigma\left(\varepsilon\right),v\right),$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon b_{ki}^\varepsilon\partial_k^\varepsilon u_l^\varepsilon b_{mj}^\varepsilon\partial_m^\varepsilon v_l^\varepsilon\delta^\varepsilon dx^\varepsilon &= \varepsilon^5\int_\Omega \sigma_{ij}\left(\varepsilon\right)\partial_i^\theta u_3\left(\varepsilon\right)\partial_j^\theta v_3 dx \\ &+ \varepsilon^7\varrho_C\left(\varepsilon;\sigma\left(\varepsilon\right),u\left(\varepsilon\right),v\right),\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} f_3^\varepsilon v_3^\varepsilon\delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon\cup\Gamma_-^\varepsilon} g_3^\varepsilon v_3^\varepsilon\delta^\varepsilon\beta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon + \int_{\gamma_1} h_\alpha^\varepsilon\left\{\int_{-\varepsilon}^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon\right\}d\gamma =$$

$$\varepsilon^5\left(\int_\Omega f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma + \int_{\gamma_1} h_\alpha\left\{\int_{-1}^1 v_\alpha dx_3\right\}d\gamma\right) + \varepsilon^7\varrho_F\left(\varepsilon;v\right).$$

De plus :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho^\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon} u_i^\varepsilon v_i^\varepsilon\delta^\varepsilon dx^\varepsilon\right\} = \varepsilon^5\frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho\int_\Omega u_3\left(\varepsilon\right)v_3 dx\right\} + \varepsilon^7\varrho_A(\varepsilon;u(\varepsilon),v).$$

Alors :

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho\int_\Omega u_3(\varepsilon)v_3 dx\right\} - \int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\gamma_{ij}^\theta(v)dx - \int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\partial_i^\theta u_3(\varepsilon)\partial_j^\theta v_3 dx =$$

$$-\int_\Omega f_3 v_3 dx - \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma - \int_{\gamma_1} h_\alpha\left\{\int_{-1}^1 v_\alpha dx_3\right\}d\gamma + \varepsilon^2 R\left(\varepsilon;\sigma(\varepsilon),u(\varepsilon),v\right).$$

Les fonctions ϱ_A, ϱ_B, ϱ_C et ϱ_F sont des restes bornés pour $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, leurs expressions ne sont pas nécessaires (voir par exemple [2]). ■

On applique les techniques de l'analyse asymptotique employé par Ciarlet [3] au problème $(P(\varepsilon))$ (ε un petit paramètre destiné à tendre vers zéro), on obtient le :

Théorème 2 *On suppose que :*

$$(u(\varepsilon), \sigma(\varepsilon)) = (u^0, \sigma^0) + \varepsilon(u^1, \sigma^1) + \varepsilon^2(u^2, \sigma^2) + \cdots,$$

avec :

$$u^0 = \left(u_i^0\right) \in V\left(\Omega\right),\ \partial_3 u_3^0 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right),$$

$$u^p = (u_i^p) \in \boldsymbol{W}^{1,4}(\Omega),\ \forall p \ge 1,\ \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ji}^0 \in L^2(\Omega).$$

Alors u^0 est de type Kirchhoff-Love et vérifie le problème suivant :

$$(P_{KL}) \begin{cases} \textit{Trouver } u^0 \in V_{KL}(\Omega)\ \forall t \in [0,T], \textit{tel que}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\left\{\rho \int_\Omega u_3^0 v_3 dx\right\} + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\alpha (u_3^0 + \theta) \partial_\beta v_3 dx = \\ \int_\Omega f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma + 2\int_{\gamma_1} h_\alpha v_\alpha d\gamma, \forall v \in V_{KL}(\Omega), \forall t \in]0,T[, \\ u^0\left(x,0\right) = p^0 \textit{ et } \frac{\partial u^0}{\partial t}\left(x,0\right) = q^0 \textit{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où :

$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\bar{E}_{\sigma\sigma}^0(u^0)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\bar{E}_{\alpha\beta}^0(u^0),$

$\bar{E}_{\alpha\beta}^0(u^0) = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0 + \partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta u_3^0 + \partial_\alpha \theta \partial_\beta u_3^0 + \partial_\beta \theta \partial_\alpha u_3^0\right).$

Preuve.

On introduit l'expression du développement asymptotique formel de $(u(\varepsilon), \sigma(\varepsilon))$ dans les équations du problème $(P(\varepsilon))$, puis on annule les coefficients des puissances successives de ε trouvées dans ces équations, jusqu'à l'identification du terme d'ordre ε^0. Après une suite assez longue de calculs (des calculs semblables dans le cas statique sont détaillés dans [3, 4]) on obtient le problème bi-dimensionnel (P_{KL}).

On note que u^0 est de type Kirchhoff-Love, au sens $\partial_i u_3^0 + \partial_3 u_i^0 = 0$ dans Ω. ■

4. équivalence du premier terme du développement asymptotique avec la solution d'un modèle déplacement bi-dimensionnel

On montre alors que le premier terme u^0 du développement asymptotique de $u(\varepsilon)$ peut-être complètement identifié à partir de la solution d'un problème variationnel bi-dimensionnel en déplacement, en ce sens que l'inconnue ζ qui y apparaît est le champ de déplacements des points de la surface moyenne $\bar{\omega}$ de la coque. De façon plus précise, on a le :

Théorème 3 *Le terme $u^0 = (u_i^0)$ est de la forme : $u_\alpha^0 = \zeta_\alpha - x_3\partial_\alpha\zeta_3$ et $u_3^0 = \zeta_3$, avec $\zeta = (\zeta_i) \in V(\omega)$ est la solution du problème variationnel suivant :*

$$(P(\omega)) \left\{ \begin{array}{l} 2\rho\int_\omega \frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2}\eta_3 d\omega - \int_\omega m_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 d\omega + \int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\partial_\beta\eta_3 d\omega \\ +\int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha d\omega = \int_\omega p_3\eta_3 d\omega + 2\int_{\gamma_1} h_\alpha\eta_\alpha d\gamma, \forall\eta \in V(\omega), \forall t \in]0,T[, \\ \zeta_3(.,0) = p_3^0 \textit{ et } \frac{\partial\zeta_3}{\partial t}(.,0) = q_3^0 \textit{ dans } \omega, \end{array} \right.$$

où :
$m_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}\left\{\frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\Delta\zeta_3\delta_{\alpha\beta} + 4\mu\partial_{\alpha\beta}\zeta_3\right\}$,
$\bar{N}_{\alpha\beta} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\bar{E}^0_{\sigma\sigma}(\zeta)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu\bar{E}^0_{\alpha\beta}(\zeta)$,
$\bar{E}^0_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\zeta_\beta + \partial_\beta\zeta_\alpha + \partial_\alpha\theta\partial_\beta\zeta_3 + \partial_\beta\theta\partial_\alpha\zeta_3 + \partial_\alpha\zeta_3\partial_\beta\zeta_3)$,
$p_3 = \int_{-1}^1 f_3 dx_3 + g_3(.,+1) + g_3(.,-1)$.

Preuve.

Il est bien connu (voir [4, Théorème 1.4-4]) que $v = (v_i) \in V_{KL}(\Omega)$ si et seulement s'il existe $\eta = (\eta_i) \in V(\omega)$, tel que $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3\partial_\alpha\eta_3$ et $v_3 = \eta_3$. Comme $v \in V_{KL}(\Omega)$, donc $v = (\eta_1 - x_3\partial_1\eta_3, \eta_2 - x_3\partial_2\eta_3, \eta_3)$, avec $\eta_3 \in H^2(\omega)$ et $\eta_3 = \partial_\nu\eta_3 = 0$ sur γ_1.

(i) On prend $v = (-x_3\partial_1\eta_3, -x_3\partial_2\eta_3, \eta_3)$, avec $\eta_3 \in H^2(\omega)$ et $\eta_3 = \partial_\nu\eta_3 = 0$ sur γ_1, on déduit que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\rho\int_\Omega \zeta_3\eta_3 dx\} + \int_\Omega -x_3\sigma^0_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\partial_\beta\eta_3 dx = \int_\Omega f_3\eta_3 dx + \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} g_3\eta_3 d\Gamma.$$

(ii) On prend $v = (\eta_1, \eta_2, 0)$, avec $\eta_\alpha \in H^1(\omega)$, on déduit que :

$$\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha dx = 2\int_{\gamma_1} h_\alpha\eta_\alpha d\gamma.$$

(iii) On applique la formule de Fubini : $\int_\Omega F dx = \int_\omega \left\{\int_{-1}^1 F dx_3\right\} d\omega$, on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\rho\int_\Omega \zeta_3\eta_3 dx\} = 2\rho\int_\omega \frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2}\eta_3 d\omega,$$

$$\int_\Omega -x_3\sigma^0_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx = -\int_\omega m_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 d\omega,$$

$$\int_{\Omega} \sigma^0_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\zeta_3 + \theta) \partial_\beta \eta_3 dx = \int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\zeta_3 + \theta) \partial_\beta \eta_3 d\omega,$$

$$\int_\Omega f_3 \eta_3 dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 \eta_3 d\Gamma = \int_\omega \{ \int_{-1}^{1} f_3 dx_3 + g_3(.,+1) + g_3(.,-1) \} \eta_3 d\omega$$

$$\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta} \partial_\beta \eta_\alpha dx = \int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta} \partial_\beta \eta_\alpha d\omega = 2 \int_{\gamma_1} h_\alpha \eta_\alpha d\gamma.$$

Alors :

$$2\rho \int_\omega \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial t^2} \eta_3 d\omega - \int_\omega m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 d\omega + \int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\zeta_3 + \theta) \partial_\beta \eta_3 d\omega$$

$$+ \int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta} \partial_\beta \eta_\alpha d\omega = \int_\omega \{ \int_{-1}^{1} f_3 dx_3 + g_3(.,+1) + g_3(.,-1) \} \eta_3 d\omega + 2 \int_{\gamma_1} h_\alpha \eta_\alpha d\gamma.$$

■

Il reste enfin à écrire le problème aux limites résolu, c'est-à-dire lorsque les données et la solution sont suffisamment régulières. On utilise les formules de Green ad hoc, on établit ensuite l'équivalence formelle du problème variationnel $(P(\omega))$ avec un problème aux limites en déplacement :

Théorème 4 *Une solution suffisamment régulière $\zeta = (\zeta_i)$ du problème $(P(\omega))$ est la solution du problème suivant :*

$$(\bar{P}(\omega)) \begin{cases} \textit{Trouver } \zeta \in V(\omega)\ \forall t \in [0,T], \textit{tel que}, \\ 2\rho \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial t^2} - \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} - \bar{N}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} (\zeta_3 + \theta) = p_3 \textit{ dans } \omega \times]0,T[, \\ \partial_\beta \bar{N}_{\alpha\beta} = 0 \textit{ dans } \omega \times]0,T[, \\ \zeta_3 = \partial_\nu \zeta_3 = 0 \textit{ sur } \gamma_1 \times]0,T[, \\ \bar{N}_{\alpha\beta} \nu_\beta = 2 h_\alpha \textit{ sur } \gamma_1 \times]0,T[, \\ m_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = 0 \textit{ sur } \gamma_2 \times]0,T[, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta} \nu_\beta + \partial_\tau (m_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) = 0 \textit{ sur } \gamma_2 \times]0,T[, \\ \bar{N}_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 \textit{ sur } \gamma_2 \times]0,T[, \\ \zeta_3(.,0) = p_3^0 \textit{ et } \frac{\partial \zeta_3}{\partial t}(.,0) = q_3^0 \textit{ dans } \omega. \end{cases}$$

Preuve.

On applique la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned} -\int_\omega m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 d\omega &= \int_\gamma \{ (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}) \nu_\beta + \partial_\tau (m_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) \} \eta_3 d\gamma \\ &- \int_\gamma m_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \partial_\nu \eta_3 d\gamma - \int_\omega (\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}) \eta_3 d\omega, \end{aligned}$$

$$\int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\,\partial_\beta\eta_3 d\omega = -\int_\omega \left\{\partial_\beta\left(\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right)\right\}\eta_3 d\omega + \int_\gamma \left(\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right)\nu_\beta\eta_3 d\gamma,$$

$$\int_\omega \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha d\omega = -\int_\omega \left(\partial_\beta\bar{N}_{\alpha\beta}\right)\eta_\alpha d\omega + \int_\gamma \bar{N}_{\alpha\beta}\nu_\beta\eta_\alpha d\gamma.$$

Donc :

$$\int_\omega \left[2\rho\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2} - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} - \partial_\beta\left(\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right) - p_3\right]\eta_3 d\omega \;-$$
$$\int_\omega \left(\partial_\beta\bar{N}_{\alpha\beta}\right)\eta_\alpha d\omega + \int_\gamma \left(\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_\beta - 2\tilde{h}_\alpha\right)\eta_\alpha d\gamma - \int_{\gamma_2} m_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta\partial_\nu\eta_3 d\gamma \;+$$
$$\int_{\gamma_2}\left\{\left[\partial_\alpha m_{\alpha\beta} + \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right]\nu_\beta + \partial_\tau\left(m_{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta\right)\right\}\eta_3 d\gamma = 0,$$

pour tout $\eta = (\eta_\alpha, \eta_3) \in V(\omega)$. Les fonctions $\tilde{h}_\alpha : \gamma\times[0,T] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\tilde{h}_\alpha = h_\alpha \text{ sur } \gamma_1\times[0,T] \text{ et } \tilde{h}_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_2\times[0,T].$$

L'équation précédente implique que tous les coefficients de η_α, η_3, et $\partial_\nu\eta_3$ liés aux intégrales sont nuls dans leurs domaines respectifs de l'intégration. Ainsi on obtient :

$$2\rho\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2} - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} - \partial_\beta\left(\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right) = p_3 \text{ dans } \omega\times]0,T[\,,$$

et

$$\partial_\beta\bar{N}_{\alpha\beta} = 0 \text{ dans } \omega\times]0,T[\,,$$

on déduit que :

$$\partial_\beta\left(\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_\alpha(\zeta_3+\theta)\right) = \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}(\zeta_3+\theta) \text{ dans } \omega\times]0,T[\,,$$

et on obtient :

$$2\rho\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2} - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} - \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}(\zeta_3+\theta) = p_3 \text{ dans } \omega\times]0,T[\,.$$

De même on obtient :

$$\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_{\beta} - 2\tilde{h}_{\alpha} = 0 \text{ sur } \gamma \times]0,T[\,,$$

donc :

$$\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_{\beta} = 2h_{\alpha} \text{ sur } \gamma_1 \times]0,T[\,,$$

et

$$\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma_2 \times]0,T[\,.$$

En plus, on trouve :

$$m_{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma_2 \times]0,T[\,,$$

et

$$\left[\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta} + \bar{N}_{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\zeta_3 + \theta\right)\right]\nu_{\beta} + \partial_{\tau}\left(m_{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\tau_{\beta}\right) = 0 \text{ sur } \gamma_2 \times]0,T[\,,$$

et puisque $\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_{\beta} = 0$ sur $\gamma_2 \times]0,T[$, on déduit que :

$$\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}\nu_{\beta} + \partial_{\tau}\left(m_{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\tau_{\beta}\right) = 0 \text{ sur } \gamma_2 \times]0,T[\,.$$

■

5. équivalence avec les équations de Marguerre-von Kármán généralisées dynamiques

En suivant une démarche analogue à celle de [7] (voir aussi [6] pour les plaques de von Kármán généralisées), on établit le résultat suivant :

Théorème 5 *Soit $\zeta = (\zeta_i)$ une solution du problème $(\bar{P}(\omega))$ avec la régularité : $\zeta_\alpha \in H^3(\omega)$, $\zeta_3 \in H^4(\omega)$ $\forall t \in [0,T]$, alors*

a) *Les fonctions $\tilde{h}_\alpha$ sont dans l'espace $H^{\frac{3}{2}}(\gamma)$ et satisfaisants les conditions de compatibilité :*

$$\int_{\gamma} \tilde{h}_1 d\gamma = \int_{\gamma} \tilde{h}_2 d\gamma = \int_{\gamma} (x_1\tilde{h}_2 - x_2\tilde{h}_1) d\gamma = 0.$$

b) *Il existe une fonction d'Airy $\Phi \in H^4(\omega)$, unique si l'on impose $\Phi(0) = \partial_\alpha \Phi(0) = 0$, telle que :*

$$\bar{N}_{11} = 2\partial_{22}\Phi,\ \bar{N}_{12} = \bar{N}_{21} = -2\partial_{12}\Phi,\ \bar{N}_{22} = 2\partial_{11}\Phi \textit{ dans } \omega\times]0,T[.$$

c) *Le couple* $(\zeta_3, \Phi) \in H^4(\omega) \times H^4(\omega)$ *vérifie les équations de Marguerre-von Kármán généralisées dynamiques :*

$$(P)\begin{cases} 2\rho\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2} + \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta^2\zeta_3 = 2\left[\Phi, \zeta_3 + \theta\right] + p_3 \textit{ dans } \omega \times]0, T[\,, \\ \Delta^2\Phi = -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)}\left[\zeta_3, \zeta_3 + 2\theta\right] \textit{ dans } \omega \times]0, T[\,, \\ \zeta_3 = \partial_\nu\zeta_3 = 0 \textit{ sur } \gamma_1 \times]0, T[\,, \\ m_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = 0 \textit{ sur } \gamma_2 \times]0, T[\,, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta}\nu_\beta + \partial_\tau\left(m_{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta\right) = 0 \textit{ sur } \gamma_2 \times]0, T[\,, \\ \Phi = \Phi_0 \textit{ et } \partial_\nu\Phi = \Phi_1 \textit{ sur } \gamma \times]0, T[\,, \\ \zeta_3\left(.,0\right) = p_3^0 \textit{ et } \frac{\partial\zeta_3}{\partial t}\left(.,0\right) = q_3^0 \textit{ dans } \omega, \end{cases}$$

où :
$\Phi_0(y) = -y_1\int_{\gamma(y)}\tilde{h}_2 d\gamma + y_2\int_{\gamma(y)}\tilde{h}_1 d\gamma + \int_{\gamma(y)}(x_1\tilde{h}_2 - x_2\tilde{h}_1)d\gamma,$
$\Phi_1(y) = -\nu_1\int_{\gamma(y)}\tilde{h}_2 d\gamma + \nu_2\int_{\gamma(y)}\tilde{h}_1 d\gamma,\ y = (y_1, y_2) \in \gamma,$
$[\Phi, \zeta] = \partial_{11}\Phi\partial_{22}\zeta + \partial_{22}\Phi\partial_{11}\zeta - 2\partial_{12}\Phi\partial_{12}\zeta.$

Preuve.

a) Par définition de $\bar{N}_{\alpha\beta}$, et puisque $\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_\beta = 2\tilde{h}_\alpha$ sur γ, on déduit que :
$\tilde{h}_\alpha \in H^{\frac{3}{2}}(\gamma)$.
Les fonctions $\tilde{h}_\alpha$ satisfaisants les conditions de compatibilité (voir [6, Théorème 4]).

b) (i) De $\partial_\beta\bar{N}_{\alpha\beta} = 0$ dans $\omega\times]0, T[$, et d'après le théorème de Poincaré généralisé (voir [10, Théorème VI, p.59]), il existe des distributions $\psi_\alpha \in D'(\omega)$, uniques à une constante additive près, telle que :

$$\bar{N}_{11} = 2\partial_2\psi_1,\ \bar{N}_{12} = 2\partial_2\psi_2,$$

$$\bar{N}_{21} = -2\partial_1\psi_1,\ \bar{N}_{22} = -2\partial_1\psi_2.$$

(ii) Puisque $\bar{N}_{12} = \bar{N}_{21}$, on déduit que $\partial_\alpha\psi_\alpha = 0$, et d'après le théorème de Poincaré généralisé, il existe une distribution $\Phi \in D'(\omega)$, unique à l'addition de polynômes de degré ≤ 1 près, telle que :

$$\psi_1 = \partial_2\Phi,\ \psi_2 = -\partial_1\Phi.$$

Alors :

$$\bar{N}_{11} = 2\partial_{22}\Phi,\ \bar{N}_{12} = \bar{N}_{21} = -2\partial_{12}\Phi,\ \bar{N}_{22} = 2\partial_{11}\Phi \text{ dans } \omega\times]0, T[.$$

De $\bar{N}_{\alpha\beta} \in H^2(\omega)$, $\Phi(0) = \partial_\alpha\Phi(0) = 0$ et puisque ω est un ouvert de Nikodym, il existe une fonction d'Airy $\Phi \in H^4(\omega)$ unique (voir [2, Théorème 5.1]).

c) (i) De $\bar{N}_{\alpha\beta}\nu_\beta = 2\tilde{h}_\alpha$ sur $\gamma\times]0,T[$, on obtient :

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2}\bar{N}_{1\beta}\nu_\beta = \partial_\tau(\partial_2\Phi),$$

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2}\bar{N}_{2\beta}\nu_\beta = -\partial_\tau(\partial_1\Phi),$$

donc pour tout $y \in \gamma$, on trouve :

$$\partial_1\Phi(y) = -\int_{\gamma(y)} \tilde{h}_2 d\gamma \ \text{ et } \ \partial_2\Phi(y) = \int_{\gamma(y)} \tilde{h}_1 d\gamma,$$

de sorte que :

$$\partial_\nu\Phi(y) = -\nu_1(y)\int_{\gamma(y)} \tilde{h}_2 d\gamma + \nu_2(y)\int_{\gamma(y)} \tilde{h}_1 d\gamma,$$

$$\partial_\tau\Phi(y) = -\tau_1(y)\int_{\gamma(y)} \tilde{h}_2 d\gamma + \tau_2(y)\int_{\gamma(y)} \tilde{h}_1 d\gamma.$$

Alors :

$$\Phi = \Phi_0 \text{ et } \partial_\nu\Phi = \Phi_1 \text{ sur } \gamma\times]0,T[.$$

(ii) Puisque $-\partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta^2\zeta_3$, $\bar{N}_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}(\zeta_3+\theta) = 2[\Phi,\zeta_3+\theta]$, on déduit que :

$$2\rho\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial t^2} + \frac{8\mu\,(\lambda+\mu)}{3\,(\lambda+2\mu)}\Delta^2\zeta_3 = 2\,[\Phi,\zeta_3+\theta] + p_3 \ \text{ dans } \omega\times\,]0,T[\,.$$

(iii) De $\Delta^2\Phi = \frac{1}{2}\Delta\bar{N}_{\alpha\alpha}$ et $\partial_{\alpha\beta}\bar{N}_{\alpha\beta} = 0$, on trouve :

$$\Delta^2\Phi = -\frac{\mu\,(3\lambda+2\mu)}{2\,(\lambda+\mu)}\,[\zeta_3,\zeta_3+2\theta] \ \text{ dans } \omega\times\,]0,T[\,.$$

■

6. Conclusions et commentaires

L'application de la méthode des développements asymptotiques aux équations élastodynamiques dans le cadre non linéaire d'une coque mince peu-profonde, considérée comme un milieu tri-dimensionnel, avec des conditions aux limites sur le bord latéral de type von Kármán généralisées (pression sur une partie du bord et le reste est libre), montre que le premier ordre significatif du développement asymptotique est solution d'un problème dynamique bi-dimensionnel non linéaire qui dépend de la fonction d'Airy Φ et de la déflexion ζ_3.

Naturellement, on retrouve les équations de Marguerre-von Kármán classiques dynamiques en prenant $\gamma_2 = \varnothing$. Si $\theta \equiv 0$ dans $\bar{\omega}$, la coque peu-profonde devient une plaque et les équations de Marguerre-von Kármán généralisées dynamiques se réduisent aux équations de von Kármán généralisées dynamiques.

Comme perspectives de ce travail, on se propose d'étudier l'existence des solutions du problème bi-dimensionnel (P), représentant les équations de Marguerre-von Kármán généralisées dynamiques et la modélisation asymptotique du problème de Signorini (avec frottement) associé au problème $(\hat{P}^\varepsilon.C)$.

7. Bibliographie

[1] P.G. CIARLET, « A justification of the von Kármán equations », *Arch. Rational Mech. Anal*, vol. 73, 349-389, 1980.

[2] P.G. CIARLET, J.C. PAUMIER, « A justification of the Marguerre-von Kármán equations », *Comput. Mech*, vol. 1, 177-202, 1986.

[3] P.G. CIARLET, « Plates and junctions in elastic multistructures », *Masson, 1990*.

[4] P.G. CIARLET, « Mathematical Elasticity, vol II, Theory of Plates », *North-Holland, Amsterdam, 1997*.

[5] G. ANDREOIU-BANICA, « Justification of the Marguerre-von Kármán equations in curvilinear coordinates », *Asymptotic Anal*, vol. 19, 35-55, 1999.

[6] P.G. CIARLET, L. GRATIE, « Generalized von Kármán equations », *J. Math. Pures Appl.*, vol. 80(3), 263-279, 2001.

[7] L. GRATIE, « Generalized Marguerre-von Kármán equations of a nonlinearly elastic shallow shell », *Applicable Anal*, vol. 81, 1107-1126, 2002.

[8] P.G. CIARLET, L. GRATIE, « From the classical to the generalized von Kármán and Marguerre-von Kármán equations », *Computational and Applied Mathematics*, vol. 190, 470-486, 2006.

[9] P.G. CIARLET, L. GRATIE, « On the existence of solutions to the generalized Marguerre-von Kármán equations », *Math. Mech. Solids*, vol. 11, 83-100, 2006.

[10] L. SCHWARTZ, « Théorie des distributions », *Hermann, Paris, 1966*.

[11] L.M. XIAO, « Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells-justification of equations for dynamic membrane shells », *Asymptotic Anal*, vol. 17, 121-134,

1998.

[12] L.M. XIAO, « Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells-justification of equations for dynamic flexural shells », *Chin. Ann. of Math.*, vol. 22B : 1, 13-22, 2001.

[13] L.M. XIAO, « Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells-justification of equations for dynamic Koiter shells », *Chin. Ann. of Math.*, vol. 22B : 3, 267-274, 2001.

[14] YE JI, « Asymptotic analysis of dynamic problem for linearly elastic generalized membrane shells », *Asymptotic Anal*, vol. 36, 47-62, 2003.

[15] YAN GUAN, « Asymptotic analysis of linearly elastodynamic shallow shells with variable thickness », *Asymptotic Anal*, vol. 50, 1-12, 2006.

[16] K. MARGUERRE, « Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formanderung », *in : Proceedings, Fifth International Congress for Applied Mechanics, pp. 93-101, 1938*.

[17] T. VON KÁRMÁN, H.S. Tsien, « The buckling of spherical shells by external pressure », *J. Aero. Sci*, vol. 7, 43-50, 1939.