

Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle

Nicolas Bacaër^{1,*}, Hisashi Inaba², Ali Moussaoui³

¹Unité de modélisation des systèmes complexes, Institut de recherche pour le développement, Paris, France

²Département de mathématiques, Université de Tokyo, Tokyo, Japon

³Département de mathématiques, Université de Tlemcen, Tlemcen, Algérie

*E-mail : nicolas.bacaer@ird.fr

DOI : [10.46298/arima.6713](https://doi.org/10.46298/arima.6713)

Soumis le 14 août 2020 - Publié le 19 janvier 2021

Volume : 32 - Année : 2019-2021

Résumé

On étudie un modèle mathématique pour la transition démographique. Il s'agit d'un système différentiel homogène de degré un. Il y a deux classes d'âge et deux niveaux de fécondité. La fécondité faible s'étend par mimétisme aux adultes avec une fécondité élevée. Lorsque le coefficient de mimétisme augmente, le système traverse deux seuils entre lesquels la population croît ou décroît exponentiellement avec un mélange stable des deux fécondités. Cette transition démographique partielle rappelle la situation dans certains pays d'Afrique subsaharienne.

Mots-Clés

démographie, modèle mathématique, système homogène

I INTRODUCTION

La transition démographique est un phénomène observé dans tous les pays du monde et qui s'étend sur plusieurs décennies. La population voit d'abord sa mortalité baisser. Puis, avec un certain retard, c'est au tour de la fécondité de baisser. À cause de ce décalage, la population croît souvent de manière considérable, avec d'importantes conséquences économiques et sociales [5]. L'hypothèse bien connue de la modernisation insiste sur le fait que le faible taux de fécondité est le résultat d'une adaptation individuelle à des environnements modernisés, à mesure que l'industrialisation, l'urbanisation, les normes éducatives et les familles changent. Il est néanmoins difficile d'établir un lien direct entre la baisse de la fécondité et de nombreux indices du niveau de développement social. On cherche par conséquent un mécanisme dynamique pour comprendre l'écart entre le changement d'attitude individuelle et les données statistiques macroscopiques.

Si l'on suit le découpage en « trois démographies » de [13], on peut dire que la transition démographique peut être envisagée sous trois angles : statistique, politique ou mathématique.

C'est sous ce dernier angle, illustré notamment par les travaux de Verhulst [1] ou de Lotka [3] et résumé par exemple par [10], que l'on va considérer le problème. Contrairement aux deux premiers angles, l'approche mathématique permet notamment de faire des projections quantitatives. Mais c'est surtout du point de vue qualitatif que l'on va envisager la dynamique du problème.

Du point de vue de la modélisation mathématique, la transition démographique peut être présentée soit comme exogène, soit comme endogène. Dans le premier cas, la population est supposée homogène mais la modernisation des conditions de vie fait que les paramètres démographiques varient dans le temps. Cela conduit à des modèles non autonomes [4]. L'hypothèse sous-jacente est donc que la baisse de la fécondité n'est pas due à l'interaction entre différentes composantes de la population mais à un « progrès » externe.

L'approche endogène consiste au contraire à utiliser des modèles autonomes, c'est-à-dire dont les coefficients ne dépendent pas du temps, mais avec une population hétérogène. Les changements qualitatifs résultent alors de l'interaction entre les sous-populations ; la transition démographique est un peu analogue à une épidémie. Des normes culturelles novatrices qui réduisent le nombre de naissances peuvent être transmises par des individus à faible fécondité (les « infectés ») à des individus traditionnels à fécondité élevée (les « susceptibles »), selon une dynamique fondée sur la « théorie de la diffusion » [9, 11]. Ce processus de transmission peut être déclenché par des changements socio-économiques et environnementaux.

[19] a récemment développé ce point de vue épidémique pour la théorie de la diffusion de la transition de la fécondité ; le déclin de la fécondité est décrit comme le résultat de la diffusion de la tendance à avoir moins d'enfants. Le premier modèle divisait la population entre individus $P_1(t)$ avec une fécondité élevée et individus $P_2(t)$ avec une fécondité faible. Leurs nombres évoluaient selon un système différentiel homogène de degré un

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2},$$

où r_1 et r_2 sont les taux de croissance des populations isolées ($r_1 > r_2$), tandis que b est un coefficient de mimétisme indiquant le taux maximum auquel les individus avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Ce taux est supposé dépendre linéairement de la fraction $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$ de la population avec une fécondité faible. En termes écologiques, c'est un système du genre proies-prédateurs à la manière de Lotka et Volterra [2] mais avec un taux de prédation non linéaire qui ne dépend que du rapport des deux populations, comme dans le modèle d'Arditi et Ginzburg [20, §2.3]. L'analyse mathématique est très simple : il suffit d'observer que $f(t)$ est solution d'une équation logistique. Selon que $b < r_1 - r_2$ ou $b > r_1 - r_2$, la population totale tend à croître exponentiellement avec un taux r_1 ou r_2 et c'est la fraction de la population avec une fécondité faible ou celle avec une fécondité élevée qui tend vers 0. En partant d'une population avec une fécondité élevée et quelques individus avec une fécondité faible, la transition démographique n'a donc lieu que si b est strictement supérieur au seuil unique $r_1 - r_2$.

Dans un deuxième temps, [19] considérait une version structurée par âge du même modèle. Comme l'âge x était une variable continue, cela conduisait à un système d'équations aux déri-

vées partielles du type de McKendrick et von Foerster :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

avec

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

Dans ce modèle, $m(x)$ est la mortalité, $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont les fertilités. L'analyse mathématique du modèle est alors plus compliquée et seuls des résultats très partiels ont été obtenus. Il n'existe en général plus un seul seuil mais deux. Sous le premier seuil et au-dessus du second seuil, il existe une unique solution exponentielle triviale localement stable (au sens de la théorie des systèmes homogènes) composée d'individus avec une fécondité élevée dans le premier cas, faible dans le second cas. Entre les deux seuils, au moins pour certaines valeurs des paramètres (c'est-à-dire avec certaines conditions supplémentaires certainement non optimales), il a été possible de démontrer l'existence d'une solution exponentielle non triviale qui mêle des individus avec des fécondités différentes ; ni la question de l'unicité ni celle de la stabilité de cette solution non triviale n'ont été abordées. Pour cette solution, le taux de croissance de la population est intermédiaire. La transition démographique n'est alors que partielle. Cette différence qualitative avec le premier modèle n'était pas évidente a priori.

Le régime entre les deux seuils semblait anecdotique dans [19] puisque la motivation provenait de la démographie du Japon. La transition démographique y est si avancée que le taux de croissance de la population est devenu négatif ; on se trouve au-delà du second seuil. En revanche, il se pourrait que le régime intermédiaire présente un intérêt dans le cas de certains pays d'Afrique subsaharienne. La fécondité moyenne y a effectivement baissé un peu mais bien moins que ce que prévoyaient les démographes [14]. Par ailleurs, les difficultés d'analyse du système d'équations aux dérivées partielles poussent à chercher un modèle plus simple pour une transition démographique partielle.

On étudie donc ci-dessous un modèle avec seulement deux classes d'âge (jeunes et adultes) au lieu d'un âge qui varie continûment. L'intérêt est qu'il conserve le même phénomène de transition à deux seuils. Ceci permet de faire une étude plus complète : on montre notamment que la solution non triviale est unique et que son domaine d'existence coïncide exactement avec le domaine d'instabilité des solutions triviales ; on parvient aussi à démontrer la stabilité locale de la solution non triviale.

On présente le modèle dans la section 2 avec ses solutions exponentielles triviales et non triviales. On étudie la stabilité des solutions exponentielles dans la section 3 en utilisant notamment le critère de Routh-Hurwitz et la théorie relativement peu connue des systèmes différentiels homogènes de degré un développée par [6, p. 638], également exposée dans les livres [16, chap. 5], [17, chap. 4] et [12, chap. 4]. Il a d'ailleurs fallu recourir à un logiciel de calcul formel pour se sortir de calculs autrement inextricables. Comme le système est de dimension 4,

la stabilité de la solution exponentielle non triviale présente une difficulté qui était absente des exemples des références ci-dessus. La section 4 présente un exemple numérique qui se veut représentatif de quelques pays d'Afrique subsaharienne. La section 5 propose une conjecture pour le comportement asymptotique global faute d'avoir trouvé une fonction de Liapounov convenable. Quoique plus simple que celle du système d'équations aux dérivées partielles, l'analyse de notre modèle est donc encore incomplète.

II LE MODÈLE ET SES SOLUTIONS EXPONENTIELLES

Notons $X_1(t)$ et $Y_1(t)$ le nombre de jeunes et d'adultes de familles fécondes. Notons de même $X_2(t)$ et $Y_2(t)$ le nombre de jeunes et d'adultes de familles peu fécondes. On suppose que

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (2)$$

où $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ sont les fécondités avec $a_1 > a_2$, $m > 0$ est la mortalité, $c > 0$ est le taux de passage des jeunes à l'âge adulte, et $b > 0$ est un coefficient de mimétisme qui donne le taux maximum auquel les adultes avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Plus le coefficient b est faible, plus la population est « conservatrice » ; plus le coefficient b est élevé, plus la population est sujette au « panurgisme ». Contrairement au deuxième modèle de [19], c'est la fraction $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ d'adultes peu féconds dans la population adulte qui intervient dans le modèle et non la fraction d'individus de familles peu fécondes dans la population totale. On suppose $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ et $Y_2(0) > 0$.

Si l'on pose $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$, on remarque que le système différentiel ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

avec un second membre qui est une fonction vectorielle homogène de degré un. L'existence globale et la positivité des solutions du système (3) se montrent comme dans les modèles démographiques avec mariage; voir par exemple [12, chap. 4]. La positivité résulte de ce que $dX_1/dt \geq 0$ lorsque $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ lorsque $Y_1 = 0$, etc. Avec une condition initiale dont les composantes sont toutes strictement positives, chaque composante reste même strictement positive pour tout $t > 0$. L'existence globale résulte de l'inégalité pour la population totale $P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2$: $dP/dt \leq (a_1 - m)P$.

On dit que $Z(t) = e^{\lambda t} z$ est une solution exponentielle positive du système (3) si $z = (z_i)$ est un vecteur fixé avec $z_i \geq 0$ pour tout i , si $\sum_i z_i > 0$ et si (λ, z) est une solution du problème de valeur propre non linéaire

$$\lambda z = F(z).$$

Si (λ, z) est une pareille solution et si $\alpha > 0$, alors $(\lambda, \alpha z)$ est aussi une solution. On dit qu'une solution exponentielle positive est normalisée si $\sum_i z_i = 1$.

Proposition 1:

Il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}.$$

De même, il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$:

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

Si $b_1 < b < b_2$ avec

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

alors il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ avec $x_1^* > 0, y_1^* > 0, x_2^* > 0$ et $y_2^* > 0$:

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Démonstration. La première solution doit vérifier $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, $(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1$ et $(\lambda + m)y_1 = c x_1$. D'où l'équation quadratique pour λ : $(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0$. Les deux racines sont $[-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}]/2 - m$ mais seule celle avec un + conduit à des solutions (x_1, y_1) qui sont positives.

La deuxième solution s'obtient de la même manière en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2.

Quant à la troisième solution, elle doit vérifier

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

On ne peut pas avoir $c + \lambda + m = 0$ car on aurait sinon $y_1 = 0$. Donc $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ et $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. D'où, en remplaçant dans les deux autres équations et en divisant par y_1 ou y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1. \quad (6)$$

Le membre de droite dans la formule pour y_1/y_2 doit être strictement positif. Notons qu'il tend vers -1 quand b tend vers 0^+ et qu'il tend vers $-a_2/a_1 < 0$ quand b tend vers $+\infty$. La dérivée du dénominateur par rapport à b est $-c/b^2 + 2c(a_1 - a_2)/b^3$. Elle est strictement positive pour $0 < b < 2(a_1 - a_2) := b_3$, nulle quand $b = b_3$ et strictement négative quand $b > b_3$. Par ailleurs, un petit calcul montre que le dénominateur dans (6) s'annule pour $b = b_1$ et vaut 1

quand $b = b_2$. On remarque enfin que $b_1 < b_2 < b_3$. On en conclut que le membre de droite dans la formule (6) pour y_1/y_2 décroît de -1 à $-\infty$ sur l'intervalle $]0, b_1[$, décroît de $+\infty$ à 0 sur l'intervalle $]b_1, b_2[$, continue à décroître sur l'intervalle $]b_2, b_3[$ en prenant des valeurs négatives, puis croît sur l'intervalle $]b_3, +\infty[$ en restant négatif. Donc y_1/y_2 n'est positif que sur l'intervalle $]b_1, b_2[$. Les formules pour x_1, y_1, x_2 et y_2 découlent de (6) et de la normalisation $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. \square

Remarquons que $b_1 < b_2$. Lorsque b croît de b_1 à b_2 , le taux de croissance λ^* donné par (6) décroît de λ_1 à λ_2 . Lorsque c tend vers $+\infty$, le modèle avec deux groupes d'âges se réduit au modèle de l'introduction avec un seul groupe d'âges ; on vérifie bien que les deux seuils b_1 et b_2 convergent alors vers un seuil unique égal à $a_1 - a_2$.

III LA STABILITÉ DES SOLUTIONS EXPONENTIELLES

Pour $i \in \{1, 2\}$, posons

$$\mathbf{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathbf{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Notons que $\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_2 = 1$. Un calcul assez simple à partir du système (1)-(2) montre alors que

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = a_1 \mathbf{Y}_1 - c \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = c \mathbf{X}_1 - b \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} - \mathbf{Y}_1 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = a_2 \mathbf{Y}_2 - c \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = c \mathbf{X}_2 + b \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} - \mathbf{Y}_2 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2]. \quad (10)$$

Si $e^{\lambda t} z$ avec $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ fixé est une solution exponentielle normalisée du système (1)-(2), alors les équations (4)-(5) sont vérifiées. En additionnant les quatre équations, on obtient que $a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m$. On en déduit que z est un point d'équilibre du système (7)-(10). On dit que la solution $e^{\lambda t} z$ est « asymptotiquement stable » (respectivement instable) si z est un point d'équilibre asymptotiquement stable (resp. instable) du système (7)-(10). Il résulte du théorème d'Euler pour les fonctions homogènes vectorielles (ici de degré un) que λ est toujours une valeur propre de la matrice jacobienne $J_F(z)$ de la fonction F définie par (3) en z car

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

D'après [6, p. 638]), l'équilibre z est asymptotiquement stable si les trois valeurs propres de $J_F(z)$ autres que λ ont une partie réelle strictement inférieure à λ ; il est instable si l'une de ces trois valeurs propres a une partie réelle strictement supérieure à λ . C'est ce que l'on va utiliser dans la proposition suivante.

Proposition 2: — Soit $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$ la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable si $b < b_1$, instable si $b > b_1$.

— Soit $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$ la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable si $b > b_2$, instable si $b < b_2$.

— Soit $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable pour $b_1 < b < b_2$.

Démonstration. De manière générale, si $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ avec $y_1 + y_2 > 0$ et si

$$p = \frac{y_2}{y_1 + y_2},$$

alors

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Dans le premier cas, on a $p = 0$. Donc

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est λ_1 . La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m,$$

qui est clairement une fonction strictement croissante de b . De plus,

$$\begin{aligned} \mu_2 = \lambda_1 &\Leftrightarrow \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c} = \sqrt{c^2 + 4a_1c} - b \\ &\Leftrightarrow (b + c)^2 + 4a_2c = c^2 + 4a_1c + b^2 - 2b\sqrt{c^2 + 4a_1c} \\ &\Leftrightarrow 2bc + 4a_2c = 4a_1c - 2b\sqrt{c^2 + 4a_1c} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}} = b_1. \end{aligned}$$

Donc $\mu_2 > \lambda_1$ si $b > b_1$, et $\mu_2 < \lambda_1$ si $b < b_1$.

Dans le deuxième cas, on a $p = 1$. Donc

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est λ_2 . La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m,$$

qui est une fonction décroissante de b puisque

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

De plus, le même calcul que ci-dessus en échangeant a_1 avec a_2 et b avec $-b$ montre que

$$\begin{aligned} \mu_1 = \lambda_2 &\Leftrightarrow \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c} = \sqrt{c^2 + 4a_2c + b} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}} = b_2. \end{aligned}$$

Donc $\mu_1 > \lambda_2$ si $b < b_2$, et $\mu_1 < \lambda_2$ si $b > b_2$.

Dans le troisième cas, on a $0 < p < 1$. Il résulte alors de l'équation (6) que

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}. \quad (12)$$

On sait déjà, d'après le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes, que λ^* est une valeur propre de la matrice $J_F(z)$ définie par (11). La question est de savoir si les trois autres valeurs propres ont une partie réelle strictement inférieure à λ^* . Autrement dit, la matrice

$$M = J_F(z) - \lambda^* I$$

a une valeur propre nulle (et donc un déterminant nul), et il s'agit de savoir si les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. On a

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc de la forme

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left(c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right) \begin{vmatrix} -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{vmatrix} \\ & - c \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne, avec la « règle de Sarrus »,

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left(c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right) \\ & \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

En développant les deux accolades, on trouve

$$\begin{aligned}
 \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \\
 & \left\{ -\xi^3 + \xi^2 \left[b(1-p)^2 - bp^2 + 2c - 3c \frac{a_1 - a_2}{b} \right] \right. \\
 & + \xi \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) + \right. \\
 & \left. \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) - \right. \\
 & \left. c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) + a_2c - b^2p^2(1-p)^2 \right] \\
 & + c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) \\
 & \left. + a_2c \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) - b^2p^2(1-p)^2 c \frac{a_1 - a_2}{b} \right\} \\
 & - c \left\{ a_1\xi^2 + \xi \left[2a_1c \frac{a_1 - a_2}{b} - a_1b(1-p)^2 \right] \right. \\
 & \left. - a_1c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) - a_1a_2c \right\}.
 \end{aligned}$$

Pour le coefficient de ξ^3 dans le polynôme $\chi(\xi)$, on a donc

$$\begin{aligned}
 k_2 &= c \frac{a_1 - a_2}{b} - \left[b(1-p)^2 - bp^2 + 2c - 3c \frac{a_1 - a_2}{b} \right] \\
 &= 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1-2p)
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en remplaçant p par son expression (12) et après simplification,

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Pour le coefficient de ξ^2 , on a

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[b(1-p)^2 - bp^2 + 2c - 3c \frac{a_1 - a_2}{b} \right] \\
 & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) + \right. \\
 & \left. \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) \left(b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right) - \right. \\
 & \left. c \frac{a_1 - a_2}{b} \left(bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right) + a_2c - b^2p^2(1-p)^2 \right] - a_1c,
 \end{aligned}$$

ce qui conduit, en remplaçant p par son expression (12) et après une simplification laborieuse, à

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Enfin, pour le coefficient de ξ , on a utilisé le logiciel de calcul formel Xcas (www.xcasenligne.fr) pour obtenir

$$k_0 = -c \frac{[a_1b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c][a_2b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

Notons que k_0 peut aussi s'écrire sous la forme

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1a_2c}{b^3(a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Pour que les trois racines du polynôme $\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0$ aient une partie réelle strictement négative, il faut et il suffit d'après le critère de Routh-Hurwitz que $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ et $k_1k_2 - k_0 > 0$ [7, p. 134]. On a bien $k_2 > 0$. D'autre part, $k_1 > 0$ lorsque $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ et donc en particulier pour $b_1 < b < b_2$ puisque $b_2 < a_1 - a_2$. On a aussi $k_0 > 0$ pour $b_1 < b < b_2$. Il ne reste donc qu'à voir si $k_1k_2 - k_0 > 0$ lorsque $b_1 < b < b_2$. En développant le produit k_1k_2 et en ordonnant les termes selon les puissances de b , on obtient

$$k_1k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5c^2 + 2(a_1 - a_2)^4c^2b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2(a_1 + a_2)cb^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1a_2(a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2(a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2b^3}.$$

On regroupe certains termes :

$$k_1k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5c^2 + (a_1 - a_2)^3c^2b[2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3cb^2 + (a_1^2 - a_2^2)c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ \left. + a_1a_2(a_1 - a_2)b^4 + (a_1 + a_2)^2b^4[2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2b^3}.$$

Comme $b < b_2 < a_1 - a_2$, on voit que les termes entre crochets sont tous strictement positifs. Ainsi $k_1k_2 - k_0 > 0$. La troisième solution est donc bien asymptotiquement stable pour $b_1 < b < b_2$. \square

IV UN EXEMPLE

Prenons $a_1 = 10\%$ par an. Rappelons que ce paramètre est égal au nombre de naissances dans les familles avec une fécondité élevée divisé par la population adulte avec une fécondité élevée, et non le taux de natalité employé habituellement en démographie, qui divise par la population totale. Prenons aussi : $a_2 = 4\%$ par an, $c = 5\%$ par an (de sorte que $1/c = 20$ ans) et $m = 2\%$ par an. L'espérance de vie à la naissance est donc $1/m = 50$ ans. Rappelons qu'en 2017, les

espérances de vie pour les hommes et pour les femmes étaient par exemple égales à 52 et 55 ans en Côte d'Ivoire, à 51 et 54 ans au Tchad, à 50 et 53 ans en Centrafrique [18].

Avec ces valeurs des paramètres, on obtient d'une part $\lambda_1 = 3\%$ par an et $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ par an, d'autre part $b_1 = 3\%$ par an et $b_2 \simeq 3,9\%$ par an. La figure 1 montre les différents taux de croissance λ_1 , λ^* et λ_2 en fonction de b . C'est dans l'intervalle $]b_1, b_2[$ qu'il y a une transition démographique partielle avec un taux de croissance λ^* . Par comparaison, le taux d'accroissement naturel est de 2,4% par an en Côte d'Ivoire, de 3,3% au Tchad et de 2,2% en Centrafrique. Le Tchad serait donc plutôt dans le cas où $b < b_1$, tandis que les deux autres pays seraient dans la situation intermédiaire avec $b_1 < b < b_2$.

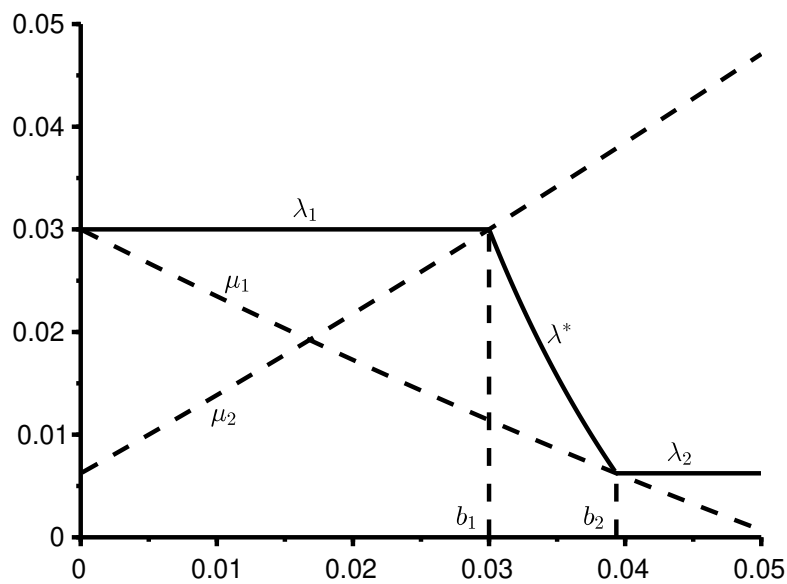


FIGURE 1 – Les taux asymptotiques de croissance de la population λ_1 , λ^* et λ_2 (ligne continue) en fonction du coefficient de mimétisme b (en abscisse). Les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont en pointillé.

Pour ce modèle, on peut calculer la proportion de « jeunes » dans la population. Lorsque $b < b_1$, elle vaut $x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$. Lorsque $b > b_2$, elle vaut $x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$. Néanmoins, étant donnée la structure du modèle, ces « jeunes » auraient une moyenne d'âge $1/(c + m)$ de 14,3 ans. Il est donc difficile de comparer avec les statistiques démographiques. D'après [18], la proportion des moins de 15 ans est de 43% en Côte d'Ivoire, de 48% au Tchad et de 44% en Centrafrique.

On en déduit aussi que le taux de natalité est $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$ pour 1000 habitants si $b < b_1$, $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$ pour 1000 habitants si $b > b_2$. Pour les trois pays déjà considérés, les chiffres sont dans l'ordre 37, 46 et 36 pour 1000 habitants.

Ainsi donc, les valeurs choisies pour les paramètres sont relativement réalistes.

V LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

L'étude de stabilité n'était jusqu'ici que locale. Comme le système est de dimension 4 et comme il se ramène au mieux à un système de dimension 3, il ne semble pas possible d'utiliser le

théorème de Poincaré et Bendixson pour déterminer le comportement asymptotique global, contrairement au modèle démographique avec mariage de plus petite dimension de [12, chap. 4].

Il est également difficile de trouver une fonction de Liapounov convenable. Quoique notre système homogène puisse se transformer en un système avec uniquement des termes linéaires ou quadratiques si l'on prend comme nouvelles inconnues $X_1/(Y_1+Y_2)$, $Y_1/(Y_1+Y_2)$, $X_2/(Y_1+Y_2)$ et $Y_2/(Y_1+Y_2)$, la fonction de Liapounov avec des termes logarithmiques utilisée par exemple par [8] pour une classe particulière de pareils systèmes ne semble pas convenir.

En s'inspirant du modèle linéaire de population de [15, p. 80], on obtient cependant la proposition suivante.

Proposition 3:

La fonction

$$V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

est toujours positive et décroissante.

Démonstration. Posons plus généralement $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ avec $k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1[-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c+m)X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Comme $Y_1(t) > 0$ et $Y_2(t) > 0$, le terme avec b en facteur est négatif et il reste

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

Pourvu que $\lambda + c + m \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

Choisissons λ de sorte que le coefficient de Y_1^2 s'annule. On trouve que

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Pour avoir $\lambda + c + m > 0$, ne conservons que la racine avec un $+$ dans \pm . Cette racine, qui dépend de k , est minimale si $a_1^2/k + kc^2$ est minimal, c'est-à-dire si $k = a_1/c$. Avec ce choix, on a $\lambda = \lambda_1$ et

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

□

Notons que $V(t)$ converge vers une limite positive ou nulle. En particulier, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ et $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$.

Proposition 4:

La fonction

$$W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

avec

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (13)$$

est toujours positive et décroissante.

Démonstration. Posons plus généralement $W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ avec $k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Comme $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$, on obtient

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

Pourvu que $\lambda + c + m \neq 0$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Choisissons λ de sorte que le coefficient de Y_2^2 s'annule. On trouve que

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Pour avoir $\lambda + c + m > 0$, ne conservons que la racine avec un $+$ dans \pm . Cette racine, qui dépend de k , est minimale si $a_2^2/k + kc^2$ est minimal, c'est-à-dire si $k = a_2/c$. Alors λ est donné par la formule (13) et on a bien $dW/dt \leq 0$. \square

Ces deux dernières propositions ne permettent pas de distinguer les différents comportements asymptotiques selon la valeur de b . On conjecture néanmoins, étant données les propositions 1 et 2, que :

— si $b < b_1$, alors

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, 0, 0)$$

avec $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ et $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$; c'est la population avec une fécondité élevée qui en proportion finit par dominer;

— si $b_1 < b < b_2$, alors

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, ce dernier vecteur étant celui de la proposition 1. Il y a coexistence en proportion des sous-populations avec des fécondités différentes ;

— si $b > b_2$, alors

$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0, x_2, y_2)$$

avec $x_2 > 0, y_2 > 0$ et $(\lambda_2 + m)y_2 = cx_2$; c'est la population avec une fécondité basse qui en proportion finit par dominer.

Ainsi donc, la transition démographique partielle observée dans certains pays d'Afrique subsaharienne pourrait correspondre au cas intermédiaire où $b_1 < b < b_2$.

Pour soutenir cette conjecture, considérons l'exemple numérique de la section précédente. Prenons une condition initiale quelconque, par exemple $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (comme le système est homogène, on peut penser à 1 million). La figure 2 montre comment le système se comporte selon la position de b par rapport à b_1 et b_2 . Si la conjecture semble bien se confirmer, on notera cependant dans le cas où $b_1 < b < b_2$ que le temps caractéristique de convergence est assez long ; la deuxième valeur propre de la matrice $J_F(z)$ est proche de λ^* .

VI CONCLUSION

Quoique encore incomplète d'un point de vue mathématique, notre étude est néanmoins plus précise que celle du modèle analogue de [19]. On a vu que même pour un système d'équations différentielles ordinaires homogènes, l'étude de la stabilité linéaire n'est pas triviale, tandis que la stabilité globale nous échappe encore. Cela donne une idée de la difficulté qu'il y aura à traiter le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles.

On espère que tout ceci stimulera l'étude mathématique de nouveaux modèles pour la transition démographique. Il s'agit d'un phénomène global de toute première importance, souvent moins évoqué que la pollution, le réchauffement climatique ou les épidémies. C'est en tout cas un enjeu majeur pour l'Afrique subsaharienne [21]. Notre modèle aborde le problème qualitativement. Sans doute faudrait-il développer aussi des modèles plus quantitatifs, plus proches des données démographiques.

RÉFÉRENCES

Publications

- [1] P.-F. VERHULST. « Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement ». In : *Correspondance mathématique et physique* 10 (1838), pages 113-121.
- [2] V. VOLTERRA. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris : Gauthier-Villars, 1931.
- [3] A. J. LOTKA. *Théorie analytique des associations biologiques, 2^e partie*. Paris : Hermann, 1939.

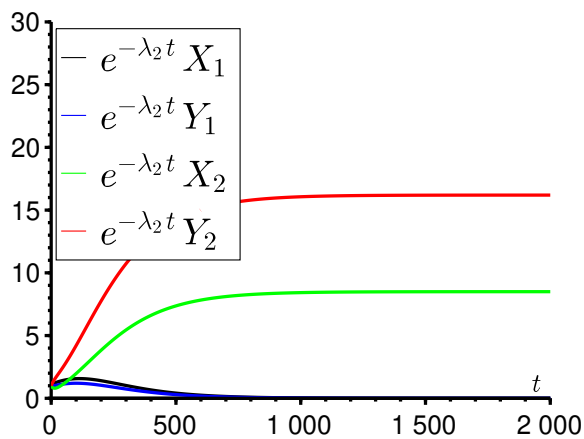
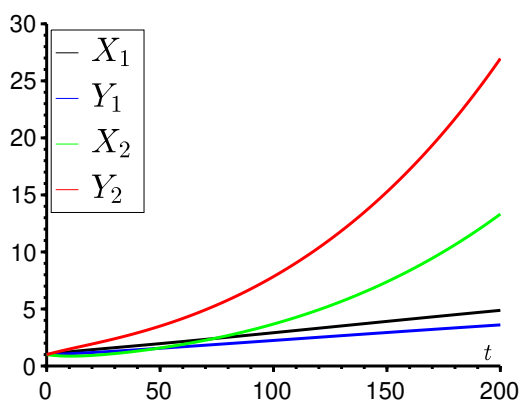
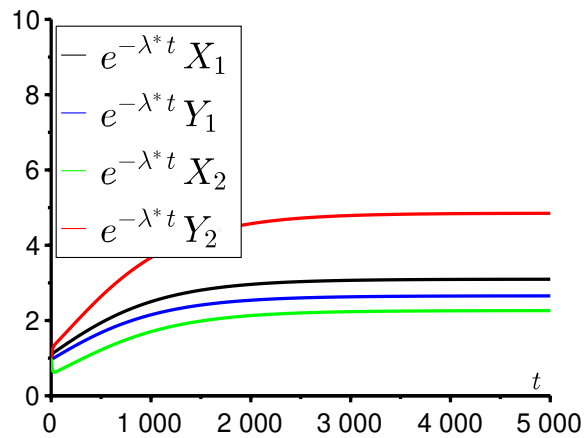
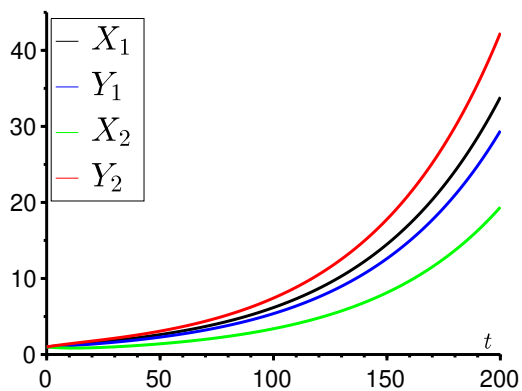
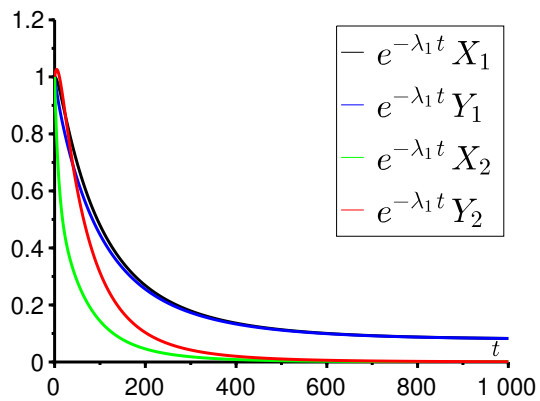
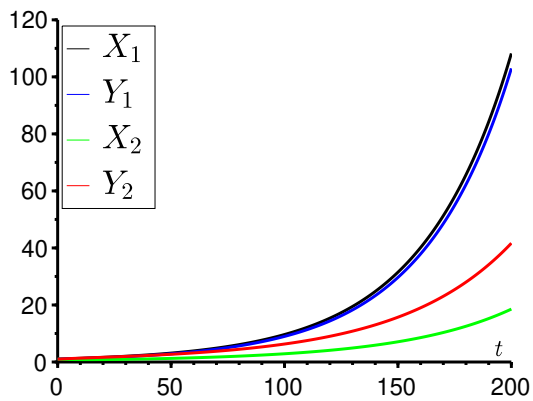


FIGURE 2 – Première ligne : $b = 0,025 < b_1$. Deuxième ligne : $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$. Troisième ligne : $b = 0,05 > b_2$.

- [4] M. ARTZROUNI. « Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique ». In : *Population* 41 (1986), pages 497-509.
- [5] J.-C. CHESNAIS. *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*. Paris : Presses Universitaires de France, 1986.
- [6] K. P. HADELER, R. WALDSTÄTTER et R. A. WÖRZ-BUSEKROS. « Models for pair formation in bisexual populations ». In : *Journal of Mathematical Biology* 26 (1988), pages 635-649.
- [7] H. REINHARD. *Équations différentielles, fondements et applications*. Paris : Dunod, 1989.
- [8] V. CAPASSO. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. Berlin : Springer, 1993.
- [9] L. ROSERO-BIXBY et J. B. CASTERLINE. « Modelling diffusion effects in fertility transition ». In : *Population Studies* 47 (1993), pages 147-167.
- [10] R. PRESSAT. *Éléments de démographie mathématique*. Paris : AIDELF, 1995.
- [11] P. MANFREDI et L. FANTI. *The demographic transition and neo-classical models of balanced growth*, in : N. SALVADORI (éd.), *The Theory of Economic Growth*. Cheltenham : Edward Elgar, 2003.
- [12] J. W. PRÜSS, R. SCHNAUBELT et R. ZACHER. *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*. Bâle : Birkhäuser, 2008.
- [13] H. LE BRAS. « Les trois démographies ». In : *Socio* 2 (2013), pages 273-290.
- [14] H. LERIDON. « Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive ». In : *Futuribles* 407 (2015), pages 5-21.
- [15] T. GOUDON. *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*. Londres : ISTE, 2017.
- [16] K. P. HADELER. *Topics in Mathematical Biology*. Cham : Springer, 2017.
- [17] H. INABA. *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*. Singapour : Springer, 2017.
- [18] G. PISON. « Tous les pays du monde ». In : *Population & Sociétés* 547 (2017), pages 1-8.
- [19] H. INABA, R. SAITO et N. BACAËR. « An age-structured epidemic model for the demographic transition ». In : *Journal of Mathematical Biology* 77 (2018), pages 1299-1339.
- [20] C. LOBRY. *La Relation ressource-consommateur, Modélisation mathématique*. Londres : ISTE, 2018.
- [21] H. VEDIE. « La transition démographique : un enjeu majeur pour l'Afrique tropicale ». In : *Revue internationale des économistes de langue française* 3 (2018), pages 70-79.